MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT.

UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
BERLIN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

8. BAND

QA1
M88
v.8-11

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1920

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
BERLIN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

8. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1920

Inhaltsverzeichnis

Seite

Berwald, L., Über affine Geometrie XXVII. Liesche F_3. Affinnormale und mittlere Affinkrümmung 63

Blaschke, W., Über affine Geometrie XXVIII: Bestimmung aller Flächen, die von den umschriebenen Zylindern längs ebener Kurven berührt werden . 115

Carlson, F., Ein Satz über Kegelschnitte mit einigen Anwendungen auf die perspektive Affinität 138

Doetsch, G., Über die obere Grenze des absoluten Betrages einer analytischen Funktion auf Geraden 237

Heuman, C., Ein Satz über Culmannsche Trägheitsellipsen 155

Hilb, E., Über die Laplacesche Reihe. (II. Teil.) 79

Horn, J., Laplacesche Integrale und Gammaquotientenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen und Volterraschen Integralgleichungen . 100

Jolles, St., Einfache Kennzeichen polarer Korrelationen 91

Jung, H. W. E., Über die Differentialinvarianten algebraischer Flächen 182

von Kerékjártó, B., Zur Theorie der mehrdeutigen stetigen Abbildungen . . 310

Koschmieder, L., Über besondere Jacobische Polynome 123

Meyer, W. Fr., Zu der Abhandlung von Herrn Roland Weitzenböck: „Über eine Ungleichung in der Dreiecksgeometrie“ 96

Noether, E. und W. Schmeidler, Moduln in nichtkommutativen Bereichen, insbesondere aus Differential- und Differenzenausdrücken 1

Ostrowski, A., Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen 241

Perron, O., Zur Theorie der Summengleichungen 159

von Pidoll, M., Bemerkungen über Vertauschung von Limes und Integral . . 299

Pólya, G., Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Momentenproblem 171

Steinhaus, H., Bemerkung zu der Arbeit des Herrn L. Neder: Über die Fourierkoeffizienten der Funktionen von beschränkter Schwankung . . . 320

Szász, O., Über Potenzreihen, die im Einheitskreise beschränkte Funktionen darstellen 222

Szász, O., Ungleichheitsbeziehungen für die Ableitungen einer Potenzreihe, die eine im Einheitskreise beschränkte Funktion darstellt 303

Szegő, G., Über Potenzreihen, deren Koeffizienten zahlentheoretische Funktionen sind 36

Tauber, A., Über konvergente und asymptotische Darstellung des Integrallogarithmus 52

Moduln in nichtkommutativen Bereichen, insbesondere aus Differential- und Differenzenausdrücken.

Von

Emmy Noether und Werner Schmeidler in Göttingen.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

§ 1. Formales über Differential- und Differenzenausdrücke.

§ 2. Der allgemeine Polynombereich.

§ 3. Einseitige Moduln und ihre Restgruppen.

§ 4. Reduzibilität der Restgruppen in zwei Untergruppen und ihre Beziehungen zum Modul.

§ 5. Rechnen mit Einheiten und Reduzibilität in k Untergruppen.

§ 6. Endlichkeitssätze.

§ 7. Ein Fall eindeutiger Zerlegung.

§ 8. Additive Zerlegung vollständig reduzibler Gruppen in Primgruppen. Der Satz von der Isomorphie.

§ 9. Zusammenhang zwischen den Begriffen „isomorph“ und „von gleicher Art“.

§ 10. Existenz unendlich vieler Zerlegungen einer Gruppe.

§ 11. Beziehungen zu den Systemen von Differentialgleichungen und ihren Integralen.

§ 12. Beispiele.

Einleitung.

Die formale Theorie der Differentialausdrücke einer Variablen führt bis zur Zerlegung in irreduzible Faktoren, die in einem gewissen Sinne eindeutig ist[1]). Während sich aber der entsprechende Satz in der Algebra

[1]) Vgl. E. Landau, Ein Satz über die Zerlegung homogener linearer Differentialausdrücke in irreduzible Faktoren, [Journal für die reine und angewandte Mathematik, 124 (1902), S. 115–120] und daran anschließend A. Loewy, Über reduzible lineare homogene Differentialgleichungen [Mathematische Annalen, 56 (1903), S. 549–584].

auf Polynome mehrerer Variablen übertragen läßt, gelingt dies für pa tielle Differentialausdrücke nicht mehr[2]). Nun tritt aber bei Differentia ausdrücken einer Variablen neben die Produktdarstellung noch eine solch als kleinstes gemeinsames Vielfaches, wobei ähnliche Gesetze gelten; b zwei verschiedenen Zerlegungen lassen sich nämlich die einzelnen Bestand teile paarweise einander zuordnen, sie sind „von der gleichen Art“[3]).

Dieser Begriff des kleinsten gemeinsamen Vielfachen läßt sich nu als Modulbegriff auffassen und so auf n Variable übertragen, wom in der vorliegenden Arbeit die naturgemäße Verallgemeinerung der g nannten Sätze erzielt wird. Darüber hinaus bemerken wir aber noc daß von den Differentialausdrücken nur benutzt wird, daß sie sich a Polynome mit nichtkommutativer Multiplikation auffassen lassen, für d der Grad des Produktes gleich der Summe der Grade der Faktoren is Bedingungen, die beispielsweise auch für Differenzenausdrücke erfüllt sin so daß die Sätze auch für diese gelten, wo sie bisher ebenfalls nur für ei Variable bekannt waren[4]).

Wir entwickeln daher allgemein eine Theorie der Moduln, der Elemente Polynome mit nichtkommutativer Multiplikation sind, und zw führen wir dabei die Betrachtung der Moduln auf die der Restklass zurück[5]). Zum Unterschiede vom kommutativen Spezialfalle kann man ab hier zwar auch von der Summe von Restklassen sprechen, aber nicht vo Produkt, sondern nur vom Produkt einer Restklasse mit einem Pol nom; der Begriff der „Restgruppe“ ist also gegenüber dem kommutativ Falle zu modifizieren. Im Spezialfalle von Polynomen einer Variabl ist ferner die Restgruppe „endlich“, d. h. sie besitzt nur eine endlic Anzahl linear unabhängiger Restklassen. Allgemein existiert eine solc endliche „Ordnung“ nicht, die Gruppen sind „unendlich“. Für unse Methoden kommt aber dieser Unterschied nicht in Betracht.

Der Darstellung eines Moduls als kleinstes gemeinsames Vielfach von teilerfremden Moduln entspricht nun ebenso wie im kommutativ Falle der einfachere Prozeß der additiven Zerlegung der Restgrup Hierbei erweist sich als wesentlich die *Isomorphie* von Restgruppen, c

---

[2]) Vgl. ein bei H. Blumberg (Über algebraische Eigenschaften von linea homogenen Differentialausdrücken, Inauguraldissertation Göttingen 1912, 52 Seit veröffentlichtes Gegenbeispiel von Landau (S. 51—52).

[3]) Vgl. außer der genannten die Arbeit von A. Loewy, Über vollständig duzible lineare homogene Differentialgleichungen [Mathematische Annalen, 62 (19 S. 89—117], zitiert mit Loewy.

[4]) Vgl. G. Wallenberg—A. Guldberg, Theorie der linearen Differenz gleichungen, Leipzig und Berlin 1911.

[5]) Vgl. für den Fall kommutativer Bereiche W. Schmeidler, Über Moduln u Gruppen hyperkomplexer Größen, [Mathematische Zeitschrift, 3 (1919), S. 29—42].

ei der Spezialisierung auf Differentialausdrücke von einer Variablen in en Begriff der gleichen Art für die zugehörigen Moduln, bei der Spezialisierung auf kommutative Moduln in die Identität übergeht. Übrigens ißt sich der Begriff der gleichen Art auch auf n Variable übertragen nd die Übereinstimmung mit dem Isomorphiebegriff nachweisen. Daß ei der additiven Zerlegung der Restgruppe immer nur *endlich* viele ummanden auftreten, zeigt sich durch Übertragung des Hilbertschen atzes von der Modulbasis, die auf der Gordanschen Beweismethode beuht, während die ursprüngliche Hilbertsche Beweismethode Einschränungen über die Multiplikationsgesetze verlangen würde (in Formel (6) echts a statt a_i, was bei Differential-, aber nicht bei Differenzenausrücken erfüllt ist).

Um nun zu einem *Eindeutigkeitssatze* zu gelangen, müssen wir die Ioduln spezialisieren — wie dies auch Loewy tut — zu „vollständig eduziblen", d. h. zu solchen, die darstellbar sind als kleinstes gemeinsames ielfaches von Primmoduln. *Bei zwei verschiedenen Zerlegungen sind lsdann die Bestandteile entweder paarweise identisch, oder es entspricht enigstens jedem Bestandteile der einen Zerlegung ein isomorpher Betandteil der anderen Zerlegung und umgekehrt; zugleich enthält dann ede Zerlegung mindestens zwei isomorphe Bestandteile.* Ferner folgt us dem Auftreten zweier isomorpher Bestandteile in einer und derselben erlegung die Existenz unendlich vieler Zerlegungen, und dies gilt sogar hne die Beschränkung auf Primmoduln, was bisher auch im Spezialfalle ler Differentialausdrücke einer Variablen nicht bekannt war.

Endlich gehen wir für Moduln aus Differentialausdrücken auf den usammenhang mit den Integralen ein und zeigen, daß bei endlichen estgruppen die Ordnung gleich der Höchstanzahl der linear unabhängigen ntegrale ist, daß also dann und nur dann keine willkürlichen Funktionen m allgemeinen Integral auftreten, wenn die Restgruppe endlich ist. Der egriff der gleichen Art zweier Moduln bedeutet ferner ebenso wie im alle einer Variablen eine „birationale" Verwandtschaft der Integrale. en Abschluß bilden einige Beispiele. —

Den ersten Anstoß zu der vorliegenden Arbeit gab vor einigen Jahren ine Frage von E. Landau an E. Noether nach der Verallgemeinerung es Produktsatzes. Damals bemerkte E. Noether nur, daß es sich um ine Frage der Modultheorie im nichtkommutativen Polynombereich andelte, die sich aber nicht angreifen ließ. Die damals allein bekannten askerschen Modulsätze lassen sich nämlich nicht direkt auf diesen Beeich übertragen, weil die Laskersche Beweismethode auf dem Satze beuht, daß ein Polynom eindeutig in irreduzible Faktoren zerlegbar ist[6]).

[6]) Neuerdings bemerkte E. Noether, daß auch die Laskerschen Sätze ohne

Erst die Schmeidlerschen Methoden boten die Möglichkeit einer Übertragung, die wir dann gemeinsam ausgeführt haben. Im einzelnen sei noch erwähnt, daß die Verallgemeinerung der Restgruppe, die Übertragung und Anwendung des Hilbertschen Endlichkeitssatzes und die Existenz unendlich vieler Zerlegungen von E. Noether, die Verallgemeinerung des Loewyschen Begriffes vollständig reduzibel, der Begriff der Isomorphie und deren Zusammenhang mit dem Begriff der gleichen Art von W. Schmeidler herrühren.

§ 1.

Formales über Differential- und Differenzenausdrücke.

1. Für Differentialausdrücke einer Variablen hat man eine symbolische Produktbildung eingeführt. Sei

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n(x)\,y = A(y),$$

$$b_0(x)\frac{d^m y}{dx^m} + b_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots + b_m(x)y = B(y),$$

so definiert man das symbolische Produkt $AB(y)$ als den Differentialausdruck

$$a_0(x)\frac{d^n B(y)}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}B(y)}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n(x)\,B(y).$$

Diese Produktbildung ist in Wirklichkeit eine Multiplikation von zwei Operatoren, die sich am einfachsten schreiben läßt, indem man wie üblich $\frac{d^n}{dx^n}$ durch $\left(\frac{d}{dx}\right)^n$ ersetzt. Es geht dann AB über in

$$\left(a_0\left(\frac{d}{dx}\right)^n + \ldots + a_n\right)\left(b_0\left(\frac{d}{dx}\right)^m + \ldots + b_m\right)y,$$

wobei für die Ausführung des Produktes die gewöhnlichen Regeln der Summen- und Produktdifferentiation gelten. Jeden solchen Operator kann man nun auffassen als ein Polynom in der einen Variablen $\frac{d}{dx} = \xi$, indem man die Funktion, auf die der Operator angewandt wird, nicht explizit hinschreibt und für die Variable ξ diejenigen Multiplikationsregel festlegt, die der Produktdifferentiation entspricht:

$$\frac{d}{dx}(a(x)\cdot y) = a(x)\frac{d}{dx}(y) + a'(x)\,y,$$

Benutzung dieses Satzes begründet werden können, nach Methoden, die den hier benutzten verwandt sind.

oder in unserer Schreibweise ($n = 1$, $m = 0$)

(1) $$\xi \cdot a = a \cdot \xi + a'.$$

Ganz entsprechend verfährt man bei linearen partiellen Differentialausdrücken

$$\left(\sum a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}\right) y$$

einer Funktion y: Für die n Operatoren $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ führen wir die Variablen $\xi_1, \dots, \xi_n$ ein und erhalten dadurch das Polynom

$$\sum a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x_1, \dots, x_n) \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}.$$

Das Produkt zweier Polynome berechnet sich dann nach den Gesetzen

(2) $$\xi_i a = a \xi_i + a_i \qquad (i = 1, \dots, n),$$

wobei a_i die partielle Ableitung von a nach x_i bedeutet; die Produkte der ξ unter sich sind kommutativ. Abgesehen von dem kommutativen Gesetz der Multiplikation gelten für die so definierten Polynome alle Gesetze der Addition und Multiplikation wie in der gewöhnlichen Algebra. Insbesondere ist für das Produkt zweier solcher Polynome der Gesamtgrad und der Grad in jeder einzelnen Variablen gleich der Summe der entsprechenden Grade der beiden Faktoren.

2. Bei Differenzenausdrücken (vgl. Wallenberg a. a. O.) der Form

$$a_x^{(0)} y_{x+n} + a_x^{(1)} y_{x+n-1} + \dots + a_x^{(n)} y_x = A_x,$$
$$b_x^{(0)} y_{x+m} + b_x^{(1)} y_{x+m-1} + \dots + b_x^{(m)} y_x = B_x$$

hat man entsprechend eine Produktdefinition

$$(A B)_x = a_x^{(0)} B_{x+n} + a_x^{(1)} B_{x+n-1} + \dots + a_x^{(n)} B_x,$$

die sich mit Hilfe der Multiplikationsregel

$$(a y)_{x+1} = a_{x+1} y_{x+1}$$

ausführen läßt. Führen wir für den Übergang von x zu $x + 1$ den Operator ξ ein, so bekommen wir $\xi\{a y\} = a^* \xi\{y\}$, wobei $a_x^* = a_{x+1}$ ist. Nun kann man aber wieder die Funktion y, auf die der Operator angewandt wird, weglassen, und erhält das Gesetz

(3) $$\xi a = a^* \xi,$$

wobei neben a auch a^* nicht identisch verschwindet. Ganz entsprechend gilt für n Variable

(4) $$\xi_i a = a_i \xi_i \qquad (i = 1, \dots, n),$$

wo ξ_i für den Übergang von x_i zu $x_i + 1$ steht und a_i die Funktion bedeutet, die aus a durch Ersetzung von x_i durch $x_i + 1$ entstanden ist, also nicht identisch verschwindet, wenn dies von a gilt. Bei diesen Festsetzungen gelten ebenfalls außer dem kommutativen Gesetz alle Regeln der Addition und Multiplikation inklusive der Regel über den Grad des Produktes.

Beide Fälle sollen im folgenden Paragraphen einem ganz allgemein definierten Polynombereich mit beliebigen Koeffizienten untergeordnet werden.

§ 2.

Der allgemeine Polynombereich.

Wir gehen aus von einem beliebigen abstrakt definierten Körper P (dessen Elemente wir mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen), für den alle Regeln der Algebra, insbesondere also auch das kommutative Gesetz der Multiplikation mit eindeutiger Umkehrung gilt. Diesem Körper adjungieren wir n Unbestimmte $\xi_1, \ldots, \xi_n$, d. h wir betrachten den aus den Produkten $a\xi_{\nu_1} b\xi_{\nu_2} \ldots c\xi_{\nu_\varrho}$ und ihren endlichen Summen bestehenden Integritätsbereich J, wobei alle Gesetze der Addition und Multiplikation gelten sollen mit Ausnahme des kommutativen Gesetzes der Multiplikation. Insbesondere bezeichnen wir endliche Summen der Form

$$F(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum a_{\nu_1 \ldots \nu_\varrho} \xi_{\nu_1} \cdots \xi_{\nu_\varrho}$$

als „Polynome“ (die durchweg mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet werden sollen). Wir unterwerfen nun die Größen von J an Stelle des kommutativen Gesetzes solchen Produktgesetzen, daß *das Produkt zweier Polynome wieder ein Polynom wird*, der Bereich aller Polynome aus J also den Bereich J schon erschöpft. Dazu ist offenbar notwendig und hinreichend, daß für die Größen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ und irgendeine Größe a von P Produktregeln der Form

$$\xi_i a = F_i(\xi_1, \ldots, \xi_n) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

gelten, wobei $F_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ irgendein natürlich von ξ_i und a abhängendes Polynom darstellt. (Insbesondere sind die Regeln (2) und (4) für Differential- bzw. Differenzenausdrücke von dieser Form.) Denn da $\xi_i a$ an sich kein Polynom ist, nach Voraussetzung aber dem Bereich angehört, so ist die Gleichung notwendig. Andererseits kann man durch endlichoftmalige Anwendung der Formel (5) jede Größe des Bereiches J in ein Polynom verwandeln.

Für die Einheit des Körpers, die wir mit 1 bezeichnen, soll ferner gelten $\xi_i \cdot 1 = 1 \cdot \xi_i = \xi_i$. Weiterhin wollen wir festsetzen, daß die Multipli

kation der $\xi_1, \ldots, \xi_n$ unter sich kommutativ sei[7]). Jedes Polynom in J schreibt sich dann wie ein gewöhnliches Polynom von $\xi_1, \ldots, \xi_n$ mit Koeffizienten aus P, und zwei Polynome stimmen nur überein, wenn alle Koeffizienten übereinstimmen.

Spezieller verlangen wir nun im folgenden[8]), daß an Stelle von (5) die Regel

$$\xi_i a = a_i \xi_i + b_i \qquad (a_i \neq 0)\ (i = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

gelten soll. Auch hierin sind insbesondere die Gesetze (2) und (4) enthalten. Dann ist der Grad des Produktes gleich der Summe der Grade der Faktoren, und zwar gilt dies für den Gesamtgrad wie für den Grad in jeder einzelnen Variablen, so daß also das Produkt zweier nicht identisch verschwindender Polynome ebenfalls von 0 verschieden ist.

§ 3.

Einseitige Moduln und ihre Restgruppen.

Für unseren Bereich J lassen sich wegen der Nichtkommutativität der Multiplikation folgende Arten von *Moduln*[9]) unterscheiden:[10])

1. Der *rechtsseitige Modul*, der neben M auch FM für ein beliebiges Polynom F und neben M_1 und M_2 auch $M_1 + M_2$ enthält.

2. Der *linksseitige Modul*, der neben M auch MF und neben M_1 und M_2 auch $M_1 + M_2$ enthält.

Diese beiden Arten bezeichnen wir mit gemeinsamen Namen als *einseitige Moduln*; Moduln, die sowohl rechtsseitig wie linksseitig sind, sollen als *zweiseitig* bezeichnet werden. Wir beschränken uns im folgenden auf *rechtsseitige* Moduln und bemerken, daß die Theorie der linksseitigen sich ganz entsprechend aufbauen läßt.

Wir nennen zwei Polynome F und G *kongruent* mod $\mathfrak{M}$, in Zeichen $F \equiv G(\mathfrak{M})$, wenn ihre Differenz durch $\mathfrak{M}$ teilbar ist, d. h. zu $\mathfrak{M}$ gehört. Die Gesamtheit aller zu einem Polynom kongruenten Polynome bildet eine *Restklasse* mod $\mathfrak{M}$. (Restklassen sollen mit kleinen deutschen Buchstaben bezeichnet werden.) Da aus

$$F_1 \equiv F_2(\mathfrak{M}) \quad \text{und} \quad G_1 \equiv G_2(\mathfrak{M})$$

---

[7]) Dies wird erst von § 6 an für den Endlichkeitssatz und seine Folgerungen gebraucht.

[8]) Dies wird ebenfalls erst von § 6 an gebraucht.

[9]) Moduln bezeichnen wir mit großen deutschen Buchstaben.

[10]) Einseitige Ideale betrachtet bereits A. Hurwitz; vergl. Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen (Berlin, Springer 1919), Vorlesung 6. Es handelt sich aber hier im wesentlichen um Hauptideale; das gleiche gilt für die dort (Anmerkung 1) zitierten Arbeiten von Du Pasquier.

die Kongruenz $F_1 + G_1 \equiv F_2 + G_2 (\mathfrak{M})$ folgt, so ist die Summe zweier Restklassen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ definiert und wieder eine Restklasse $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$. Von dem Produkt zweier Restklassen kann man dagegen wegen der Einseitigkeit des Moduls nicht sprechen; in der Tat folgt aus

$$F_1 \equiv F_2 + M_1, \; G_1 = G_2 + M_2,$$

zwar

$$F_1 G_1 = F_2 G_2 + F_2 M_2 + M_1 G_2 + M_1 M_2;$$

da aber $M_1 G_2$ nicht zu $\mathfrak{M}$ zu gehören braucht, wenn M_1 zu $\mathfrak{M}$ gehört, so brauchen i. a. $F_1 G_1$ und $F_2 G_2$ nicht kongruent zu sein. Dagegen sieht man für $M_1 = 0$, also $F_1 = F_2 = F$, daß aus $G_1 \equiv G_2$ auch $F G_1 \equiv F G_2$ folgt; man kann also eine beliebige Restklasse $\mathfrak{y}$ vorn mit einem Polynom F multiplizieren und erhält dadurch eine wohldefinierte Restklasse $F\mathfrak{y} = \mathfrak{z}$.

Für das Rechnen mit Restklassen gilt das kommutative und assoziative sowie das Gesetz der eindeutigen Umkehrbarkeit der Addition, ferner für die Multiplikation von Restklassen mit Polynomen und deren Addition das distributive Gesetz $F(\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{y}_2) = F\mathfrak{y}_1 + F\mathfrak{y}_2$, wie direkt aus dem Rechnen mit Polynomen mod $\mathfrak{M}$ folgt.

Die Restklasse, der die Einheit angehört, soll als Einheitsklasse oder Einheit $\mathfrak{e}$ bezeichnet werden. Es ist dann $F\mathfrak{e} = \mathfrak{x}$ die Restklasse, zu der das Polynom F gehört. Im Gegensatz zu den allgemeinen Restklassen ist aber hier auch das Produkt $\mathfrak{x}\mathfrak{e}$ wohldefiniert und gleich $\mathfrak{x}$; denn aus

$$F_1 = F_2 + M_1, \quad G_1 = 1 + M_2$$

folgt wegen $M_1 \cdot 1 = M_1$ auch

$$F_1 G_1 = F_2 + M.$$

Die Gesamtheit der Restklassen mod $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir als die *Restgruppe von* $\mathfrak{M}$. Eine Restgruppe hat also die folgenden Eigenschaften: 1. Sie enthält neben jeder Restklasse $\mathfrak{x}$ und für ein beliebiges Polynom F auch die Restklasse $F\mathfrak{x}$, und neben den Restklassen $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ auch die Restklasse $\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2$[11]). 2. Sie besitzt eine Einheit $\mathfrak{e}$, so daß $F\mathfrak{e}$ für jedes Polynom F die Restklasse $\mathfrak{x}$ von F darstellt. *Durchläuft also F alle Polynome, so durchläuft $F\mathfrak{e}$ die gesamte Restgruppe.*

§ 4.

Reduzibilität der Restgruppe in zwei Untergruppen und ihre Beziehungen zum Modul.

Für einseitige Moduln bleiben die Begriffe *Teilbarkeit, größter gemeinsamer Teiler* und *kleinstes gemeinsames Vielfaches* wie im zweiseitigen Falle erhalten, wie die folgenden Definitionen zeigen:

[11]) Diese Eigenschaft könnte man in einem allgemeineren Sinne als die „Modul-eigenschaft" der Restgruppe bezeichnen.

Ein Modul $\mathfrak{M}$ heißt durch einen anderen $\mathfrak{N}$ *teilbar*, wenn aus $M \equiv 0(\mathfrak{M})$ auch $M \equiv 0(\mathfrak{N})$ folgt.

Für zwei Moduln $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ ist der *größte gemeinsame Teiler* $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ definiert durch die Gesamtheit aller Polynome, die in der Form $M + N$ darstellbar sind, wo $M \equiv 0(\mathfrak{M})$, $N \equiv 0(\mathfrak{N})$ ist, und wird wieder ein Modul. Entsprechendes gilt für mehrere Moduln.

Die Gesamtheit aller sowohl durch $\mathfrak{M}$ als auch durch $\mathfrak{N}$ teilbaren Polynome bildet einen Modul $[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]$, das *kleinste gemeinsame Vielfache* von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$. Auch diese Definition gilt entsprechend für mehrere Moduln, ja sogar für eine Menge von Moduln von beliebiger Mächtigkeit.

Zwei Moduln heißen teilerfremd, wenn ihr größter gemeinsamer Teiler der Einheitsmodul ist, d. h. aus der Gesamtheit aller Polynome besteht.

Wir gehen nun von einem Modul $\mathfrak{M}$ aus, der als kleinstes gemeinsames Vielfaches zweier teilerfremder Moduln $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{L}$ darstellbar ist, die beide als echte Teiler vorausgesetzt werden:

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{N}, \mathfrak{L}]. \tag{7}$$

Wir untersuchen die Restgruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{M}$. Nach Voraussetzung ist

$$1 \equiv N + L(\mathfrak{M}) \tag{8}$$

für zwei Polynome $N \equiv 0(\mathfrak{N})$ und $L \equiv 0(\mathfrak{L})$. Hieraus zeigen wir

$$\mathfrak{L} = (\mathfrak{M}, L), \quad \mathfrak{N} = (\mathfrak{M}, N), \tag{9}$$

wobei z. B. unter $(\mathfrak{M}, L)$ der Modul zu verstehen ist, der aus allen Polynomen der Form $M + FL$ besteht. In der Tat ist erstens $(\mathfrak{M}, L) \equiv 0(\mathfrak{L})$. Andererseits folgt aus (8) für ein beliebiges Polynom F:

$$F \equiv FN(\mathfrak{L}). \tag{10}$$

Ist nun $F \equiv 0(\mathfrak{L})$, so ist $FN \equiv 0(\mathfrak{L})$, also $\equiv 0(\mathfrak{M})$, folglich $F \equiv FL(\mathfrak{M})$. Entsprechend beweist man $\mathfrak{N} = (\mathfrak{M}, N)$. Es folgt hieraus übrigens, weil $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{L}$ echte Teiler von $\mathfrak{M}$ sind, daß weder $L \equiv 0$ noch $N \equiv 0(\mathfrak{M})$ sein kann.

Nun sei $\mathfrak{a}$ die Restklasse von N mod $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{b}$ die Restklasse von L mod $\mathfrak{M}$; dann ist nach (8)

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \qquad (\mathfrak{a} \neq 0, \ \mathfrak{b} \neq 0).$$

Da nun jede Restklasse von der Form $F\mathfrak{e}$ ist, so folgt nach dem distributiven Gesetz für jede Restklasse

$$F\mathfrak{e} = F\mathfrak{a} + F\mathfrak{b} \qquad (\mathfrak{a} \neq 0, \ \mathfrak{b} \neq 0). \tag{11}$$

Diese Darstellung einer beliebigen Restklasse als Summe zweier Restklassen der Form $G\mathfrak{a}$ bzw. $H\mathfrak{b}$ ist aber *eindeutig*. Denn aus einer Relation $0 = G\mathfrak{a} + H\mathfrak{b}$ folgt für ein Polynom K aus der Restklasse $G\mathfrak{a} = -H\mathfrak{b}$

offenbar $K \equiv GN(\mathfrak{M})$, $K \equiv -HL(\mathfrak{M})$, also $K \equiv 0(\mathfrak{N})$, $K \equiv 0(\mathfrak{L})$ und daher $K \equiv 0(\mathfrak{M})$, d. h. $G\mathfrak{a} = 0$, $H\mathfrak{b} = 0$.

Es sei jetzt umgekehrt die Relation (11) für jedes Polynom F erfüllt, und zwar *eindeutig* im obigen Sinne. Dann sei N ein Polynom aus $\mathfrak{a}$, L ein Polynom aus $\mathfrak{b}$. Wir bilden die beiden Moduln (9) und behaupten (7) und (8). Letzteres folgt aus (11) für $F = 1$. Ferner ist $\mathfrak{M}$ nach der Definition von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{L}$ ein gemeinsames Vielfache dieser beiden Moduln, und zwar das kleinste. Denn aus $F \equiv 0(\mathfrak{L})$ und $F \equiv 0(\mathfrak{N})$ folgt $F \equiv HL \equiv GN(\mathfrak{M})$, also $G\mathfrak{a} = H\mathfrak{b}$, $G\mathfrak{a} - H\mathfrak{b} = 0$ und daher wegen der Eindeutigkeit der Darstellung $G\mathfrak{a} = 0$, $H\mathfrak{b} = 0$, $F \equiv 0(\mathfrak{M})$. Hiermit ist also gezeigt, daß die *Darstellung eines Moduls $\mathfrak{M}$ als kleinstes gemeinsames Vielfaches zweier teilerfremder Moduln gleichbedeutend ist mit der eindeutigen additiven Zerlegung der Restgruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{M}$, wie sie Formel* (11) *angibt.*

Wir untersuchen nun das System $\mathfrak{A}$ von Restklassen der Form $F\mathfrak{a}$, das wir in Beziehung setzen wollen zu der Restgruppe $\overline{\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{L}$. Nach (11) gehört jedes Polynom F in $\overline{\mathfrak{A}}$ der Restklasse $F\bar{\mathfrak{a}}$ an, wenn $\bar{\mathfrak{a}}$ die Restklasse von $N \bmod \mathfrak{L}$, also die Einheitsklasse von $\overline{\mathfrak{A}}$ ist. Ordnen wir nun die Restklassen $F\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{A}$ und $F\bar{\mathfrak{a}}$ in $\overline{\mathfrak{A}}$ einander zu, so ist damit jeder Restklasse von $\mathfrak{A}$ eine Restklasse von $\overline{\mathfrak{A}}$ zugeordnet, wobei der Summe zweier Restklassen von $\mathfrak{A}$ die Summe und dem Produkt einer Restklasse von $\mathfrak{A}$ mit einem Polynom das Produkt der zugeordneten Restklasse von $\overline{\mathfrak{A}}$ mit demselben Polynom entspricht. Die Zuordnung ist ferner eineindeutig; denn aus $F\mathfrak{a} = 0$ folgt $F \equiv 0(\mathfrak{L})$ nach (11), also $F\bar{\mathfrak{a}} = 0$; umgekehrt besagt $F\bar{\mathfrak{a}} = 0$, also $F \equiv 0(\mathfrak{L})$ wegen (10) auch $FN \equiv 0(\mathfrak{L})$, also $FN \equiv 0(\mathfrak{M})$, d. h. $F\mathfrak{a} = 0$.

Wir sind damit auf einen fundamentalen Begriff geführt worden, den wir folgendermaßen definieren:

Eine eineindeutige Zuordnung zwischen zwei Systemen $\mathfrak{A}$ und $\overline{\mathfrak{A}}$ von Restklassen heißt isomorph, wenn der Summe zweier Restklassen von $\mathfrak{A}$ die Summe der entsprechenden Restklassen von $\overline{\mathfrak{A}}$ und dem Produkte einer beliebigen Restklasse von $\mathfrak{A}$ mit einem Polynom das Produkt der entsprechenden Restklasse von $\overline{\mathfrak{A}}$ mit demselben Polynom zugeordnet ist.

Ein Teilsystem $\mathfrak{A}$ von Restklassen in $\mathfrak{G}$, das der Restgruppe eines Moduls isomorph ist, heißt eine *Untergruppe* von $\mathfrak{G}$. Wie der obige Beweis zeigt, ist hier speziell die Zuordnung so beschaffen, daß jede Restklasse von $\overline{\mathfrak{A}}$ aus der zugehörigen Restklasse von $\mathfrak{A}$ entsteht, indem man gewisse Polynome hinzufügt, nämlich alle zu $\mathfrak{L}$, aber nicht zu $\mathfrak{M}$ gehörenden Polynome.

Entsprechend läßt sich zeigen, daß die Gesamtheit aller Restklassen

der Form Fb eine Untergruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}$ bildet, die der Restgruppe $\overline{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{N}$ isomorph ist.

Eine Restgruppe $\mathfrak{G}$, deren Restklassen eine eindeutige additive Zerlegung (11) zulassen, soll *reduzibel* heißen in die beiden Untergruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, in Zeichen $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$; eine nicht reduzible Gruppe heißt *irreduzibel*. Ebenso bezeichnen wir die zugehörigen Moduln gelegentlich als reduzibel bzw. irreduzibel. Es gilt dann also der

Satz I[12]). *Ein Modul $\mathfrak{M}$ ist dann und nur dann als kleinstes gemeinsames Vielfaches von zwei teilerfremden echten Teilern $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{N}$ darstellbar, wenn seine Restgruppe $\mathfrak{G}$ in zwei Untergruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ reduzibel ist. Dabei sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ den Restgruppen von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{N}$ bzw. isomorph.*

§ 5.

Rechnen mit Einheiten und Reduzibilität in k Untergruppen.

Die Restklassen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{G}$ haben mit der Einheit $\mathfrak{e}$ die Eigenschaft gemein, daß das Produkt von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ mit einer beliebigen Restklasse $\mathfrak{x}$ definiert ist; wir nennen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ daher ebenfalls Einheiten von $\mathfrak{G}$. In der Tat folgt aus (11) für $F = M$:

$$0 = M\mathfrak{e} = M\mathfrak{a} + M\mathfrak{b},$$

also wegen der Eindeutigkeit $M\mathfrak{a} = 0$, $M\mathfrak{b} = 0$, und daher

$$(F + M)\mathfrak{a} = F\mathfrak{a} = \mathfrak{x}\mathfrak{a},$$

wobei $\mathfrak{x}$ die Restklasse von F bedeutet. An Stelle der Relation (11) können wir also die gleichwertige Klassenrelation setzen:

$$\mathfrak{x}\mathfrak{e} = \mathfrak{x}\mathfrak{a} + \mathfrak{x}\mathfrak{b}.$$

Insbesondere folgt hieraus für $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}$ die Beziehung

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

und hieraus wegen der Eindeutigkeit $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = 0$. Ebenso ergibt sich $\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{a} = 0$.

Entsprechend der Darstellung einer Restgruppe als Summe von zwei Bestandteilen können wir nun auch eine solche als Summe von k Bestandteilen definieren. Es sei nämlich eine eindeutige Darstellung gegeben

$$F\mathfrak{e} = F\mathfrak{a}_1 + F\mathfrak{a}_2 + \ldots + F\mathfrak{a}_k \quad (\mathfrak{a}_1 \neq 0, \ldots, \mathfrak{a}_k \neq 0),$$

wobei also aus $0 = G_1\mathfrak{a}_1 + \ldots + G_k\mathfrak{a}_k$ auch $G_i\mathfrak{a}_i = 0$ folgt. Dann ergibt

---

[12]) Vgl. Schmeidler, a. a. O., S. 39.

sich insbesondere für $F = M$ die Relation $M\,\mathfrak{a}_i = 0$, so daß die Darstellung sich auch in der Form schreiben läßt[13])

$$\mathfrak{x}\mathfrak{e} = \mathfrak{x}\mathfrak{a}_1 + \ldots + \mathfrak{x}\mathfrak{a}_k \quad (\mathfrak{a}_1 \neq 0, \ldots \mathfrak{a}_k \neq 0). \tag{12}$$

Diese Darstellung kann man nun auch auffassen als entstanden aus einer sukzessiven Zerlegung in zwei Bestandteile. Läßt sich diese unbegrenzt fortsetzen, wobei alle $\mathfrak{a}_i \neq 0$ werden, so sprechen wir von einer Summe von unendlich vielen Bestandteilen.

Setzt man in (12) $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}_i$, so ergibt sich

$$\mathfrak{a}_i^2 = \mathfrak{a}_i, \quad \mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_j = 0 \quad (i \neq j), \ (i, j = 1, \ldots, k), \quad (\mathfrak{a}_i \neq 0). \tag{13}$$

Es sei nun umgekehrt ein System von Restklassen $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k$ in $\mathfrak{G}$ vorhanden, für die die „Orthogonalitätsbedingungen" (13) erfüllt sind und für die

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{a}_1 + \ldots + \mathfrak{a}_k \tag{14}$$

ist. Dann wollen wir zeigen, daß sich daraus eine Darstellung der Gruppe als Summe von k Bestandteilen ergibt. Zunächst folgt aus der Voraussetzung für jedes Polynom A_i aus $\mathfrak{a}_i$ wegen $A_i\mathfrak{a}_i = (A_i + M)\,\mathfrak{a}_i$, daß $M\,\mathfrak{a}_i = 0$ ist, $\mathfrak{a}_i$ also mit jeder Klasse multipliziert werden kann. Also folgt aus (14) die Darstellung (12), und diese ist eindeutig. Wäre nämlich $0 = \mathfrak{x}_1\mathfrak{a}_1 + \ldots + \mathfrak{x}_k\mathfrak{a}_k$, so würde durch rechtsseitige Multiplikation mit $\mathfrak{a}_i$ wegen (13) folgen: $0 = \mathfrak{x}_i\mathfrak{a}_i$, womit die Eindeutigkeit und damit die Behauptung bewiesen ist. Die bei der Zerlegung der Einheitsklasse auftretenden Restklassen $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_k$ bezeichnen wir als die zur Zerlegung gehörigen *Einheiten*, die also auch durch die Orthogonalitätsrelationen (13) und die Bedingung (14) definiert sind. Die ganzen späteren Entwicklungen werden im wesentlichen auf ein Rechnen mit Einheiten hinauslaufen.

Es handelt sich jetzt noch um den Zusammenhang der additiven Zerlegung der Gruppe in k Bestandteile mit der zugehörigen Modulzerlegung. Es wird sich wie im Falle $k = 2$ eine Darstellung des Moduls als kleinstes gemeinsames Vielfaches von k teilerfremden Moduln ergeben, und zwar mit Hilfe eines Induktionsschlusses.

Es sei also die Zerlegung (12) gegeben, die wir in der Form

$$\mathfrak{x}\mathfrak{e} = \mathfrak{x}\mathfrak{b} + \mathfrak{x}\mathfrak{a}_k, \tag{15}$$

$$\mathfrak{x}\mathfrak{b} = \mathfrak{x}\mathfrak{a}_1 + \ldots + \mathfrak{x}\mathfrak{a}_{k-1} \tag{16}$$

[13]) Für die additive Zerlegung der Restgruppen gilt das kommutative und assoziative Gesetz; dagegen folgt nicht, wie im kommutativen Falle, aus $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_3$ auch $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_3$ (vgl. das Beispiel 1 § 12).

schreiben können. Aus (15) folgt nach Satz I, daß die Restklassen $\mathfrak{x}\mathfrak{b}$ isomorph sind der Restgruppe des Moduls

$$\mathfrak{N} = (\mathfrak{M}, A_k). \tag{17}$$

Für deren Restklassen $\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{b}}$ gilt also auch die zu (16) entsprechende Darstellung

$$\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{b}} = \mathfrak{x}\bar{\mathfrak{a}}_1 + \ldots + \mathfrak{x}\bar{\mathfrak{a}}_{n-1}. \tag{18}$$

Es sei nun schon bewiesen, daß

$$\mathfrak{N} = [\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_{k-1}], \tag{19}$$

wobei

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{M}_1 = (\mathfrak{N}, A_2 + \ldots + A_{k-1}), \\ \mathfrak{M}_2 = (\mathfrak{N}, A_1 + A_3 + \ldots + A_{k-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{M}_{k-1} = (\mathfrak{N}, A_1 + \ldots + A_{k-2}) \end{array}\right. \tag{20}$$

ist. Diese Aussage stimmt für zwei Summanden mit unserem früheren Resultate überein. Die Polynome A_i können hierbei ferner speziell als solche Polynome aus $\bar{\mathfrak{a}}_i$ gewählt werden, die zugleich in $\mathfrak{a}_i$ enthalten sind, weil nach § 4 die Polynome der letzteren Restklasse in der ersteren enthalten sind. Dann gilt nach (15)

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{N}, \mathfrak{M}_k], \tag{21}$$

mit

$$\mathfrak{M}_k = (\mathfrak{M}, A_1 + \ldots + A_{k-1}).$$

Aus (19) und (21) folgt

$$\mathfrak{M} = [[\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_{k-1}], \mathfrak{M}_k] = [\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_{k-1}, \mathfrak{M}_k]$$

nach der Definition des kleinsten gemeinsamen Vielfachen; nach (17) und (20) wird

$$\mathfrak{M}_1 = (\mathfrak{M}, A_k, A_2 + \ldots + A_{k-1}).$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{M}_1 = (\mathfrak{M}, A_2 + \ldots + A_k);$$

denn letzterer Modul enthält wegen (13) auch das Polynom

$$A_k \equiv A_k(A_2 + \ldots + A_k)(\mathfrak{M}).$$

Entsprechende Ausdrücke ergeben sich für $\mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_{k-1}$. Ferner sind die Moduln $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_k$ teilerfremd, weil nach (14)

$$\frac{1}{k-1}(A_2 + \ldots + A_k + A_1 + A_3 + \ldots + A_k + \ldots + A_1 + \ldots + A_{k-1}) \equiv 1\,(\mathfrak{M})$$

ist. Überdies bilden sie ein *total teilerfremdes System*, d. h. das kleinste gemeinsame Vielfache von irgendwelchen unter ihnen ist teilerfremd zum

kleinsten gemeinsamen Vielfachen der übrigen[14]). Dies folgt direkt, indem man in Formel (12) die Summanden in zwei passende Gruppen zusammenfaßt.

Damit ist also gezeigt, daß der Zerlegung der Restgruppe in k Summanden die Darstellung des Moduls als kleinstes gemeinsames Vielfaches von k Moduln entspricht, die ein total teilerfremdes System bilden. Wir zeigen nun die Umkehrung dieses Satzes ebenfalls durch Induktion.

Es sei also

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_k] = [[\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_{k-1}], \mathfrak{M}_k] = [\mathfrak{N}, \mathfrak{M}_k],$$

wo $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_k$ ein total teilerfremdes System bilden. In Verbindung mit Satz I folgt hieraus für die Restgruppe die Darstellung (15). $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_{k-1}$ bilden nun ebenfalls ein total teilerfremdes System. Denn würde bei irgendeiner Einteilung der Moduln dieses Systems in zwei Gruppen das kleinste gemeinsame Vielfache der einen mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der anderen Gruppe einen Teiler gemein haben, so bliebe dieser auch erhalten, wenn man zu der einen Gruppe den Modul $\mathfrak{M}_k$ noch hinzufügt und dann das kleinste gemeinsame Vielfache bildet[15]). Für $k = 2$ bedeutet „total teilerfremd" dasselbe wie „teilerfremd"; daher kann unsere Behauptung bis $k - 1$ als bewiesen angenommen werden. Es gilt also für die Restklasse $\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{b}}$ die eindeutige Darstellung (18), also wegen der Isomorphie auch (16) und damit die Behauptung.

Satz II. *Ein Modul $\mathfrak{M}$ ist dann und nur dann als kleinstes gemeinsames Vielfaches von k Moduln $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_k$, die ein total teilerfremdes System bilden, darstellbar, wenn seine Restgruppe $\mathfrak{G}$ in k Untergruppen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$ reduzibel ist. Dabei ist bei passender Bezeichnung $\mathfrak{A}_i$ der Restgruppe von $\mathfrak{M}_i$ isomorph.*

§ 6.

Endlichkeitssätze.

In diesem Paragraphen soll gezeigt werden, daß jede Restgruppe als Summe von *endlich* vielen irreduziblen Bestandteilen dargestellt werden kann. Dazu übertragen wir zunächst den Hilbertschen Satz von der Modulbasis.

---

[14]) Dies ist eine Verallgemeinerung eines von Loewy eingeführten Begriffes.

[15]) Setzt man diesen Schluß fort, so zeigt sich, daß von den Moduln $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_k$ je zwei teilerfremd sind; die Umkehrung, daß hieraus folge, daß $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_k$ ein total teilerfremdes System bilden, gilt nur im kommutativen Falle allgemein. Vgl. das Gegenbeispiel 1 § 12.

Wir benutzen von jetzt an die in § 2 formulierten spezielleren Vorussetzungen, daß die Multiplikation der $\xi_1, \ldots, \xi_n$ unter sich kommutativ st und daß das Multiplikationsgesetz der Polynome die Form hat

6) $$\xi_i a = a_i \xi_i + b_i \qquad (a_i \neq 0)\ (i = 1, \ldots, n).$$

Es genügt, den Beweis nur für *Moduln* zu führen; ist nämlich $\mathfrak{S}$ rgendein System von Polynomen, so bilden wir den daraus abgeleiteten Modul $\mathfrak{M}$, indem wir zu $\mathfrak{S}$ alle Polynome hinzufügen, die aus je endlich vielen Polynomen $G_1, \ldots, G_\varkappa$ von $\mathfrak{S}$ in der Form $A_1 G_1 + \ldots + A_\varkappa G_\varkappa$ usammensetzbar sind. Ist nun $F_1, \ldots, F_l$ eine Modulbasis von $\mathfrak{M}$, nd ist

$$F_i = \sum_j A_{ij} G_j \qquad (i = 1, \ldots, l),$$

o bilden die bei diesen Darstellungen auftretenden endlich vielen Polynome $_j$ eine Basis von $\mathfrak{S}$.

Den Beweis für die Modulbasis führen wir im Anschluß an Gordan Göttinger Nachrichten 1899). Er zerfällt in zwei Teile. Der erste beieht sich auf ein System $\mathfrak{P}$ von unendlich vielen Potenzprodukten und leibt wegen der Kommutativität der $\xi_1, \ldots, \xi_n$ im wesentlichen erhalten. Die Potenzprodukte $P = \xi_1^{a_1} \ldots \xi_n^{a_n}$, von denen jedes nur einmal in das ystem aufgenommen wird, seien nach wachsendem Grade und innerhalb lesselben Grades irgendwie bestimmt geordnet. Wir betrachten nun dasenige Teilsystem $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{P}$, das alle solchen Potenzprodukte $P = Q$ entält, die durch kein vorangehendes P teilbar sind. Dann ist auch kein Q durch ein späteres Q teilbar; denn diese sind entweder höheren Grades der bei demselben Grad von den früheren verschieden. *Dagegen ist edes P von $\mathfrak{P}$ durch mindestens ein Q teilbar.* Sei nämlich im Gegenteil P_m das erste P, das durch kein Q teilbar ist. Da dann P_m kein Q ein kann, so ist es durch mindestens ein vorangehendes P teilbar, also da dieses nach Voraussetzung durch ein Q teilbar ist, selbst auch durch in Q teilbar, worin ein Widerspruch liegt.

Wir behaupten nun, daß *die Anzahl der Q eine endliche ist.* Sei in der Tat $Q_0 = \xi_1^{h_1} \ldots \xi_n^{h_n}$ das erste Q; da nun ein beliebiges $Q_\varrho = \xi_1^{h_{\varrho 1}} \ldots \xi_n^{h_{\varrho n}}$ nicht durch Q_0 teilbar ist, so muß für jedes Q mindestens ein $h_{\varrho\lambda} < h_\lambda$ sein, und zwar sei λ jeweils der kleinste Index, für den dies gilt. Wir fassen nun alle Q, für die $h_{\varrho\lambda}$ denselben festen Wert c_λ besitzt, in einer Klasse $K(c_\lambda)$ usammen. Die Anzahl dieser Klassen ist wegen $c_\lambda < h_\lambda$ eine endliche. Aber auch in jeder Klasse sind nur endlich viele Elemente. Denn setzen wir ein Q der Klasse $K(c_\lambda)$ gleich $\xi_\lambda^{c_\lambda} Q'$, so bilden auch die Q' ein System von Potenzprodukten, von denen keines durch das andere teilbar ist, und enthalten nur $n - 1$ Variable. Für $n = 2$ enthalten die Q' also

nur eine Variable; es ist aber dann ihre Anzahl $= 1$, also endlich, so daß die Anzahl auch für $n-1$ Variable als endlich angenommen werden kann, womit die Behauptung bewiesen ist.

Zweitens sei jetzt $\mathfrak{M}$ ein Modul aus Polynomen, deren Glieder lexikographisch geordnet seien. $\mathfrak{P}$ sei das System der jeweils im höchsten Gliede auftretenden Potenzprodukte, jedes nur einmal aufgeschrieben. Dann entspricht dem System $\mathfrak{Q} = (Q_1, \ldots, Q_\varrho)$ ein System von endlich vielen Polynomen $F_1, \ldots, F_\varrho$, indem man jedem Q_i irgendein Polynom aus $\mathfrak{M}$ zuordnet, dessen höchstes Glied gleich $b_i Q_i$ ist, so daß also $F_i = b_i Q_i +$ niedrigeren Gliedern gesetzt werden kann.

Es sei nun $F = bP + \ldots$ irgendein Polynom aus $\mathfrak{M}$, wobei $P = \xi_1^{\beta_1} \ldots \xi_n^{\beta_n} Q_i$ sei. Bilden wir jetzt das Produkt

$$\xi_i^{\beta_1} \ldots \xi_n^{\beta_n} F_i = \xi_1^{\beta_1} \ldots \xi_n^{\beta_n} (b_i Q_i + \ldots) = c\, \xi_1^{\beta_1} \ldots \xi_n^{\beta_n} Q_i + \ldots,$$

so ist $c \neq 0$ nach (6); und alle folgenden Glieder sind niedrigere Glieder der lexikographischen Anordnung, da die Multiplikation, was die Exponenten anbelangt, kommutativ ist bis auf niedrigere Glieder[16]). Die Differenz $F - \frac{b}{c} \xi_1^{\beta_1} \ldots \xi_n^{\beta_n} F_i$ enthält alsdann nur niedrigere Glieder und gehört wiederum zu $\mathfrak{M}$. Das Verfahren bricht also nach endlich vielen Schritten ab, so daß $F_1, \ldots, F_\varrho$ als Modulbasis erkannt ist.

Satz III. *Jedes System $\mathfrak{S}$ von unendlich vielen Polynomen besitzt eine endliche Modulbasis $G_1, \ldots, G_k$, so daß jedes Polynom G aus $\mathfrak{S}$ die Darstellung $G = A_1 G_1 + \ldots + A_k G_k$ zuläßt.*

Hieraus folgt unmittelbar der

Zusatz: *Jedes System $\mathfrak{S}$ von unendlich vielen Restklassen* mod $\mathfrak{M}$ *besitzt eine Basis $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k$, so daß jedes $\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{S}$ in der Form $\mathfrak{x} = A_1 \mathfrak{x}_1 + \ldots + A_k \mathfrak{x}_k$ darstellbar ist.*

Man ordne nämlich jeder Restklasse irgendeinen Repräsentanten zu, und betrachte das System dieser Repräsentanten und aller Polynome aus $\mathfrak{M}$.

Wir kommen nun zum Beweise von

Satz IV. *Jede Restgruppe läßt sich als Summe von endlich vielen irreduziblen Bestandteilen darstellen, also (nach Satz* II*) jeder Modul als kleinstes gemeinsames Vielfaches von endlich vielen irreduziblen Moduln, die ein total teilerfremdes System bilden.*

---

[16]) Man sieht hieraus, daß an Stelle des Gesetzes (6) auch das etwas weniger einschränkende

$$\xi_i a = a_i \xi_i + a_{i,\,i+1} \xi_{i+1} + \ldots + a_{in} \xi_n + b_i \qquad (a_i \neq 0)$$

(bei irgendeiner festen Numerierung der ξ) treten könnte.

Sei nämlich im Gegenteil $\mathfrak{G}$ eine Summe von unendlich vielen Bestandteilen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ (vgl. § 5), und seien $a_1, a_2, \ldots$ die zugehörigen Einheiten, die nach Definition sämtlich von 0 verschieden sind. Dann bilden wir das System $\mathfrak{S}$ aller dieser Einheiten, das nach dem Zusatz von Satz III eine endliche Basis $a_{i_1}, \ldots, a_{i_\nu} (i_1 < \ldots < i_\nu)$ besitzt. Es sei nun $\mu > i_\nu$. Dann gilt also $a_\mu = \xi_1 a_{i_1} + \ldots + \xi_\nu a_{i_\nu}$. Dies ist eine lineare Relation zwischen Einheiten, die nach der Definition ausgeschlossen ist. Bei jeder additiven Zerlegung einer Restgruppe tritt daher nach endlich vielen Schritten ein irreduzibler Bestandteil auf, den wir wegen der Kommutativität der Zerlegung an den Anfang stellen können. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit die $\mathfrak{A}_i$ selbst als irreduzibel annehmen. Da aber nach dem obigen Schluß nur endlich viele Bestandteile $\mathfrak{A}_i$ auftreten können, so ist hiermit die Behauptung bewiesen.

§ 7.

Ein Fall eindeutiger Zerlegung.

Es sei

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_k = \mathfrak{B}_1 + \ldots + \mathfrak{B}_l$$

eine Restgruppe, deren Bestandteile $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_l$ irreduzibel seien. Wir haben dann

$$\xi e = \xi a_1 + \ldots + \xi a_k = \xi b_1 + \ldots + \xi b_l, \tag{22}$$

wobei $a_\varkappa$ die der Einheitsklasse von $\mathfrak{A}_\varkappa$, b_λ die der Einheitsklasse von $\mathfrak{B}_\lambda$ isomorph zugeordnete Restklasse von $\mathfrak{G}$ ist. Ersetzen wir nun ξ durch ξb_λ, wo λ ein fester Index der Reihe $1, \ldots, l$ ist, so kommt

$$\xi b_\lambda = \xi b_\lambda a_1 + \ldots + \xi b_\lambda a_k. \tag{23}$$

Diese Darstellung der Gruppe $\mathfrak{B}_\lambda$ ist eindeutig, aber keine additive Zerlegung von $\mathfrak{B}_\lambda$, da die einzelnen Restklassen der rechten Seite nicht zu $\mathfrak{B}_\lambda$ zu gehören brauchen. Da b_λ nicht verschwindet, so kann nicht jedes Produkt $b_\lambda a_\varkappa$ Null sein. Es sei also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $b_\lambda a_1 \neq 0, \ldots, b_\lambda a_\varrho \neq 0$, $b_\lambda a_{\varrho+1} = 0, \ldots, b_\lambda a_k = 0$. Dann ist

$$\xi b_\lambda = \xi b_\lambda a_1 + \ldots + \xi b_\lambda a_\varrho.$$

Wir betrachten nun für ein festes $\varkappa$ der Reihe $1, \ldots, \varrho$ die Gesamtheit derjenigen Restklassen ξb_λ, die $\neq 0$ sind und für die auch $\xi b_\lambda a_\varkappa \neq 0$ ist. *Diese beiden Systeme* ξb_λ *und* $\xi b_\lambda a_\varkappa$ *sind isomorph*; denn erstens ist die Zuordnung eineindeutig, weil aus $\xi b_\lambda a_\varkappa = 0$ nach Voraussetzung $b_\lambda = 0$, und aus letzterem wegen der Eindeutigkeit der Darstellung (23) $b_\lambda a_\varkappa = 0$ folgt. Ferner entspricht der Summe die Summe und dem Produkt mit einem beliebigen Polynom das entsprechende Produkt. Wir

können nun bei festgehaltenem $\varkappa$ die entsprechende Überlegung für jedes λ machen, für das $\mathfrak{b}_\lambda \mathfrak{a}_\varkappa \neq 0$ ist. Zu jedem $\mathfrak{a}_\varkappa$ muß es mindestens ein solches $\mathfrak{b}_\lambda$ geben, wegen $\mathfrak{a}_\varkappa = (\mathfrak{b}_1 + \ldots + \mathfrak{b}_l)\mathfrak{a}_\varkappa \neq 0$.

Wir nehmen nun zunächst an, daß für jedes $\varkappa$ nur ein λ und für jedes λ nur ein $\varkappa$ existiert, so daß $\mathfrak{b}_\lambda \mathfrak{a}_\varkappa \neq 0$ ist.

Aus dieser Zuordnung folgt dann $k = l$; ferner kann die Bezeichnung so gewählt werden, daß $\mathfrak{b}_\varkappa \mathfrak{a}_\varkappa \neq 0$ ist, $\mathfrak{b}_\lambda \mathfrak{a}_\varkappa = 0$ für $\lambda \neq \varkappa$. Wir sagen dann, daß die Produkte $\mathfrak{b}_\lambda \mathfrak{a}_\varkappa$ ein Diagonalschema bilden. In diesem Falle ist nach (23) die Einheit $\mathfrak{b}_\varkappa = \mathfrak{b}_\varkappa \mathfrak{a}_\varkappa$, und wegen

$$\mathfrak{a}_\varkappa = \mathfrak{b}_1 \mathfrak{a}_\varkappa + \ldots + \mathfrak{b}_l \mathfrak{a}_\varkappa = \mathfrak{b}_\varkappa \mathfrak{a}_\varkappa = \mathfrak{b}_\varkappa \tag{24}$$

allgemein $\mathfrak{A}_\varkappa = \mathfrak{B}_\varkappa$. *Es besteht also Eindeutigkeit der Zerlegung*, und die Produkte $\mathfrak{a}_\varkappa \mathfrak{b}_\lambda$ bilden ein Diagonalschema.

Ist etwa speziell das *kommutative Gesetz für die Restklassen* $\mathfrak{a}_\varkappa \mathfrak{b}_\lambda$ *gültig, so ist die obige Voraussetzung immer erfüllt.* Denn in (23) ist alsdann jeder Bestandteil $\mathfrak{x}\mathfrak{b}_\lambda \mathfrak{a}_\varkappa = \mathfrak{x}\mathfrak{a}_\varkappa \mathfrak{b}_\lambda$ in $\mathfrak{B}_\lambda$ enthalten, so daß (23) eine additive Zerlegung der Gruppe $\mathfrak{B}_\lambda$ darstellt. Wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{B}_\lambda$ ist also jedes $\mathfrak{b}_\lambda \mathfrak{a}_\varkappa$ bis auf eines $= 0$. Wegen (24) ist ferner entsprechend für festes $\varkappa$ nur ein $\mathfrak{b}_\lambda \mathfrak{a}_\varkappa$ von Null verschieden, da (24) sonst wegen der Vertauschbarkeit von $\mathfrak{a}_\varkappa$ und $\mathfrak{b}_\lambda$ eine additive Zerlegung von $\mathfrak{A}_\varkappa$ lieferte, das doch irreduzibel sein sollte[17]).

Dieselben Schlüsse gelten in dem Falle, daß nicht für alle, sondern nur für einen Teil der $\mathfrak{b}_\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots, \sigma)$ die Bedingungen $\mathfrak{b}_\lambda \mathfrak{a}_\lambda \neq 0$, $\mathfrak{b}_\lambda \mathfrak{a}_\varkappa = 0$ für $\lambda \neq \varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, und ebenso für jedes $\mu = 1, \ldots, l$ $\mathfrak{b}_\mu \mathfrak{a}_\varkappa = 0$, $\mathfrak{b}_\varkappa \mathfrak{a}_\varkappa \neq 0$, $\varkappa = 1, \ldots, \sigma$ erfüllt sind. Man findet $\mathfrak{A}_\varkappa = \mathfrak{B}_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, \sigma)$ und wenn man

$$\mathfrak{A}_{\sigma+1} + \ldots + \mathfrak{A}_k = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{B}_{\sigma+1} + \ldots + \mathfrak{B}_l = \mathfrak{B}$$

setzt, so ist auch für die Einheiten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Bedingung $\mathfrak{b}\mathfrak{a}_\varkappa = 0$, $\mathfrak{b}_\varkappa \mathfrak{a} = 0$ $(\varkappa = 1, \ldots, \sigma)$, $\mathfrak{b}\mathfrak{a} \neq 0$ erfüllt, woraus $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ folgt.

---

[17]) Entsprechendes gilt in dem von Schmeidler a. a. O. behandelten nicht kommutativen zweiseitigen Falle, wo das Produkt jeder Restklasse der einen Untergruppe mit jeder Restklasse der anderen Untergruppe verschwindet. Dann ist nämlich wegen $\mathfrak{b}_\lambda \mathfrak{a}_\varkappa = \mathfrak{b}_\lambda \mathfrak{a}_\varkappa \mathfrak{b}_1 + \ldots + \mathfrak{b}_\lambda \mathfrak{a}_\varkappa \mathfrak{b}_l$ und wegen $\mathfrak{b}_\lambda (\mathfrak{a}_\varkappa \mathfrak{b}_\mu) = 0$ $(\lambda \neq \mu)$ auch $\mathfrak{b}_\lambda \mathfrak{a}_\varkappa = \mathfrak{b}_\lambda \mathfrak{a}_\varkappa \mathfrak{b}_\lambda$ also in $\mathfrak{B}_\lambda$ enthalten, so daß wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{B}_\lambda$ folgt, daß nur für ein $\varkappa$, also genau für ein $\varkappa$ das Produkt $\mathfrak{b}_\lambda \mathfrak{a}_\varkappa \neq 0$ ist. In gleicher Weise zeigt man, daß zu jedem $\mathfrak{a}_\varkappa$ ein und nur ein solches $\mathfrak{b}_\mu$ existiert, daß $\mathfrak{a}_\varkappa \mathfrak{b}_\mu \neq 0$ ist, woraus $k = l$ folgt. Daher bilden die $\mathfrak{b}_\lambda \mathfrak{a}_\varkappa$ ein Diagonalschema, womit die dort bewiesene Eindeutigkeit gezeigt ist.

§ 8.

Additive Zerlegung vollständig reduzibler Gruppen in Primgruppen. Der Satz von der Isomorphie.

Wir wollen nun einen anderen Fall betrachten, bei dem zwar nicht Eindeutigkeit herrscht, wohl aber Isomorphie der verschiedenen Zerlegungen. Es handelt sich hier um die Verallgemeinerung des von Loewy betrachteten Falles.

Definition: *Ein Modul heißt „Primmodul", wenn er keinen anderen Teiler besitzt als sich selbst und den sämtliche Polynome umfassenden Einheitsmodul. Die Restgruppe eines Primmoduls heißt „Primgruppe".*

Jede Primgruppe ist a fortiori irreduzibel. Es gibt auch unendliche Primgruppen (vgl. die Definition des § 11 und das Beispiel § 12, 2).

Unsere gegebene Restgruppe $\mathfrak{G}$ sei nun auf zwei Arten als Summe von (je endlich vielen) Primgruppen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$ bzw. $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_l$ darstellbar. Eine Restgruppe, die wenigstens *eine* solche Darstellung als Summe von Primgruppen zuläßt, und den zugehörigen Modul $\mathfrak{M}$ nennen wir im Anschluß an die Loewysche Bezeichnungsweise *vollständig reduzibel.*

Wir betrachten nun die Produkte $\mathfrak{a}_\varkappa \mathfrak{b}_\lambda$ $(\varkappa = 1, \ldots, k,\ \lambda = 1, \ldots, l)$, und wollen zeigen, daß entweder $\mathfrak{a}_\varkappa \mathfrak{b}_\lambda = 0$ ist, oder aber $\xi\, \mathfrak{a}_\varkappa \mathfrak{b}_\lambda$ die ganze Gruppe $\mathfrak{B}_\lambda$ durchläuft, wenn ξ alle Restklassen von $\mathfrak{G}$ durchläuft. In der Tat besitzt der zu $\mathfrak{B}_\lambda$ gehörige Modul

$$(\mathfrak{M}, \mathfrak{b}_1 + \ldots + \mathfrak{b}_{\lambda-1} + \mathfrak{b}_{\lambda+1} + \ldots + \mathfrak{b}_l) = \mathfrak{M}_{\mathfrak{b}_\lambda},$$

der aus $\mathfrak{M}$ hervorgeht, indem wir alle Polynome der Restklasse $\mathfrak{b}_1 + \ldots + \mathfrak{b}_{\lambda-1} + \mathfrak{b}_{\lambda+1} + \ldots + \mathfrak{b}_l$ hinzufügen, den Teiler

$$(\mathfrak{M}, \mathfrak{b}_1 + \ldots + \mathfrak{b}_{\lambda-1} + \mathfrak{b}_{\lambda+1} + \ldots + \mathfrak{b}_l, \mathfrak{a}_\varkappa \mathfrak{b}_\lambda).$$

Da aber der Modul $\mathfrak{M}_{\mathfrak{b}_\lambda}$ nach Voraussetzung ein Primmodul ist, so ist der Teiler entweder gleich $\mathfrak{M}_{\mathfrak{b}_\lambda}$ oder der Einheitsmodul. Im ersten Falle gehört $\mathfrak{a}_\varkappa \mathfrak{b}_\lambda$ zu $\mathfrak{M}_{\mathfrak{b}_\lambda}$; also besteht eine Relation $\mathfrak{a}_\varkappa \mathfrak{b}_\lambda = \xi(\mathfrak{b}_1 + \ldots + \mathfrak{b}_{\lambda-1} + \mathfrak{b}_{\lambda+1} + \ldots + \mathfrak{b}_l)$, woraus $\mathfrak{a}_\varkappa \mathfrak{b}_\lambda = 0$ folgt. Im anderen Falle gibt es zwei Klassen ξ_0 und ξ_1, so daß

$$\xi_0\, \mathfrak{a}_\varkappa \mathfrak{b}_\lambda + \xi_1(\mathfrak{b}_1 + \ldots + \mathfrak{b}_{\lambda-1} + \mathfrak{b}_{\lambda+1} + \ldots + \mathfrak{b}_l)$$
$$= \mathfrak{e} = \mathfrak{b}_1 + \ldots + \mathfrak{b}_{\lambda-1} + \mathfrak{b}_{\lambda+1} + \ldots + \mathfrak{b}_l + \mathfrak{b}_\lambda,$$

also wegen der Eindeutigkeit $\xi_0\, \mathfrak{a}_\varkappa \mathfrak{b}_\lambda = \mathfrak{b}_\lambda$ ist. Daher durchläuft $F\, \xi_0\, \mathfrak{a}_\varkappa \mathfrak{b}_\lambda$, also auch $\xi\, \mathfrak{a}_\varkappa \mathfrak{b}_\lambda$ die ganze Gruppe $\mathfrak{B}_\lambda$, wenn F bzw. ξ alle Polynome bzw. alle Restklassen von $\mathfrak{G}$ durchläuft, womit die Behauptung bewiesen ist.

Für $a_\varkappa b_\lambda \neq 0$ ist ferner $\mathfrak{A}_\varkappa$ isomorph zu $\mathfrak{B}_\lambda$. Denn die Gesamtheit aller Klassen $\xi a_\varkappa \neq 0$, für die auch $\xi a_\varkappa b_\lambda \neq 0$ ist, ist nach § 7 zu dem System der Klassen $\xi a_\varkappa b_\lambda$ isomorph; diese erschöpfen aber die Untergruppe $\mathfrak{B}_\lambda$. Es muß also nur noch gezeigt werden, daß die genannten Klassen $\xi a_\varkappa$ die Gruppe $\mathfrak{A}_\varkappa$ erschöpfen. Betrachten wir dazu alle Restklassen $\xi a_\varkappa$, für die $\xi a_\varkappa b_\lambda = 0$ ist; dieses System hat die Eigenschaft, daß die Summe zweier seiner Klassen und das Produkt mit einem beliebigen Polynom wieder dem System angehört. Nehmen wir daher alle diese Restklassen zu dem Modul $\mathfrak{M}_{a_\varkappa}$ hinzu, so entsteht wiederum ein Modul, der ein Teiler von $\mathfrak{M}_{a_\varkappa}$, also entweder $\mathfrak{M}_{a_\varkappa}$ oder der Einheitsmodul ist. Im letzteren Falle wäre aber $a_\varkappa$ selbst in ihm enthalten, also $a_\varkappa b_\lambda = 0$ gegen die Voraussetzung. Es gibt daher keine Klassen $\xi a_\varkappa \neq 0$ für die $\xi a_\varkappa b_\lambda = 0$ ist, und die Isomorphie von $\mathfrak{A}_\varkappa$ zu $\mathfrak{B}_\lambda$ ist bewiesen.

Es sei nun für ein bestimmtes $\varkappa$ etwa $a_\varkappa b_{\lambda_1} \neq 0, \ldots, a_\varkappa b_{\lambda_i} \neq 0 \,(i > 1)$. Dann ist $\mathfrak{A}_\varkappa$ isomorph zu den Gruppen $\mathfrak{B}_{\lambda_1}, \ldots, \mathfrak{B}_{\lambda_i}$, also sind diese Gruppen untereinander isomorph.

Wir wollen nun zeigen, daß dann auch mindestens zwei der $\mathfrak{A}$ isomorph sind. Würde nämlich in den Produkten $b_\lambda a_\varkappa$ zu jedem b_λ nur ein einziges $a_\varkappa$ gehören, so daß $b_\lambda a_\varkappa \neq 0$ ist, würde also $b_\lambda = b_\lambda a_\varkappa$ sein, so wäre $\mathfrak{B}_\lambda = \mathfrak{A}_\varkappa$, da $\mathfrak{A}_\varkappa$ als Primgruppe keine echte Untergruppe enthalten kann, also wäre $k = l$ und bei richtiger Numerierung $a_\varkappa = b_\varkappa$; dann wäre aber auch das Schema $a_\varkappa b_\lambda$ ein Diagonalschema, was nicht der Fall ist. Damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz V: *Ist eine vollständig reduzible Gruppe $\mathfrak{G}$ auf zwei Arten als Summe von Primgruppen dargestellt:* $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_k = \mathfrak{B}_1 + \ldots + \mathfrak{B}_l$, *so ist jede Gruppe $\mathfrak{A}$ mindestens einer Gruppe $\mathfrak{B}$ isomorph und umgekehrt. Ist jedes $\mathfrak{A}$ genau einem $\mathfrak{B}$ isomorph, so sind die Zerlegungen identisch. Im anderen Falle sind mindestens zwei Gruppen $\mathfrak{A}$ unter sich und ebenso mindestens zwei Gruppen $\mathfrak{B}$ unter sich isomorph.*

§ 9.

Zusammenhang zwischen den Begriffen „isomorph“ und „von gleicher Art“.

Wir zeigen in diesem Paragraphen, daß der bei Differentialausdrücken einer Variablen bekannte Begriff „der gleichen Art“, wenn er sinngemäß verallgemeinert wird, auf die Isomorphie der zugehörigen Restgruppen führt.

Definition[18]): *Zwei Moduln $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ heißen von gleicher Art,*

[18]) Vgl. für Differentialausdrücke einer Variablen die formale Definition von Blumberg (a. a. O. S. 25).

wenn es zwei Polynome P und Q gibt, wobei P zu $\mathfrak{M}$ und Q zu $\mathfrak{N}$ teilerfremd ist, so daß für jedes $M \equiv 0(\mathfrak{M})$ und $N \equiv 0(\mathfrak{N})$

(25) $$MQ \equiv 0(\mathfrak{N}),$$

(26) $$NP \equiv 0(\mathfrak{M})$$

ist. Die Teilerfremdheit bedeutet dabei die Existenz zweier Polynomen X und Y, so daß

(27) $$YQ \equiv 1(\mathfrak{N}),$$

(28) $$XP \equiv 1(\mathfrak{M})$$

ist.

Es gilt nun der

Satz VI: *Zwei Moduln sind dann und nur dann von gleicher Art, wenn ihre Restgruppen isomorph sind.*

1. Es sei $\mathfrak{A}$ die Restgruppe von $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{B}$ die Restgruppe von $\mathfrak{N}$, und es sei $\mathfrak{A}$ isomorph zu $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ seien die Einheitsklassen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Ferner sei $Q\mathfrak{b}$ die Klasse in $\mathfrak{B}$, die der Einheit $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{A}$ entspricht, ebenso $P\mathfrak{a}$ die der Einheit $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{B}$ entsprechende Klasse in $\mathfrak{A}$. Diese Zuordnung schreiben wir in der Form

(29) $$\mathfrak{a} \sim Q\mathfrak{b},$$

(30) $$P\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}.$$

Hieraus folgt

$$0 = M\mathfrak{a} \sim MQ\mathfrak{b}; \text{ d. h. } MQ \equiv 0(\mathfrak{N}),$$

womit (25) bewiesen ist.

Ebenso gilt

$$NP\mathfrak{a} \sim N\mathfrak{b} = 0, \text{ d. h. } NP \equiv 0(\mathfrak{M}),$$

also die Relation (26).

Ferner ist nach (29) $P\mathfrak{a} \sim PQ\mathfrak{b}$, und da nach (30) $P\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ vorausgesetzt war, so folgt wegen der Eindeutigkeit der Zuordnung $PQ\mathfrak{b} = \mathfrak{b}$, also $PQ \equiv 1(\mathfrak{N})$ und entsprechend $QP \equiv 1(\mathfrak{M})$, womit (27) und (28) mit $X = Q$, $Y = P$ bewiesen sind.

2. Es sei $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ von gleicher Art, so daß also die Relationen (25) bis (28) bestehen. Dann ordnen wir einer beliebigen Klasse $F\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{A}$ die Klasse $FQ\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{B}$ zu. Dabei entspricht jeder Klasse in $\mathfrak{A}$ nur *eine* Klasse in $\mathfrak{B}$; denn aus $F\mathfrak{a} = 0$, also $F = M$, folgt nach (25) $FQ\mathfrak{b} = 0$. Ferner wird die ganze Gruppe $\mathfrak{B}$ bei dieser Zuordnung erschöpft; denn der speziellen Klasse $Y\mathfrak{a}$ entspricht die Klasse $YQ\mathfrak{b}$, die nach (27) gleich $\mathfrak{b}$ ist. Wir haben also damit eine *eindeutige* Abbildung Φ

von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$, von der aber noch nicht gezeigt ist, daß sie *umkehrbar eindeutig* ist. Ebenso folgt aus den Gleichungen (26) und (28) eine eindeutige Abbildung Ψ von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{A}$, die wiederum nicht als umkehrbar eindeutig erwiesen ist.

Ist eine der beiden Abbildungen umkehrbar eindeutig, so ist die Isomorphie bewiesen, weil die Forderungen bezüglich der Summe und des Produktes erfüllt sind. Wären aber beide Abbildungen Φ und Ψ nicht umkehrbar eindeutig, so gäbe es etwa in $\mathfrak{A}$ Klassen $G\mathfrak{a}$, denen in $\mathfrak{B}$ die Klasse $GQ\mathfrak{b} = 0$ entspricht. Die den übrigen Restklassen $F\mathfrak{a}$ entsprechenden Klassen $FQ\mathfrak{b}$ erschöpfen dann schon die Gruppe $\mathfrak{B}$, und folglich erhält man durch die Abbildung Ψ in den Klassen $FQP\mathfrak{a}$ die ganze Gruppe $\mathfrak{A}$ zurück. Wie wir wissen, gibt es nun auch in $\mathfrak{B}$ von Null verschiedene Klassen, denen vermöge Ψ die Nullklasse in $\mathfrak{A}$ entspricht; wir bezeichnen mit $G_1\mathfrak{a}$ alle diejenigen Klassen, für die $G_1\mathfrak{a} \neq 0$, aber $G_1QP\mathfrak{a} = 0$ ist. Alle übrigen Polynome F haben die Eigenschaft, daß $FQP\mathfrak{a}$ die Gruppe $\mathfrak{A}$ erschöpft. Diejenigen Polynome F, für die $FQP\mathfrak{a} = G_1\mathfrak{a}$ wird, bezeichnen wir mit G_2; solche existieren stets, sobald Polynome G_1 vorhanden sind. Für jedes G_2 ist ferner $G_2QP\mathfrak{a} \neq 0$, dagegen $G_2(QP)^2\mathfrak{a} = 0$. Für jedes ganzzahlige ν gibt es entsprechend Klassen $G_\nu\mathfrak{a}$, so daß $G_\nu(QP)^{\nu-1}\mathfrak{a} \neq 0$, dagegen $G_\nu(QP)^\nu\mathfrak{a} = 0$ ist.

Wir betrachten nun das aus allen Polynomen $G_1, G_2 \ldots$ bestehende System $\mathfrak{S}$. Dies besitzt eine endliche Modulbasis $G_{\lambda_1}, \ldots, G_{\lambda_\varrho}$. Nun wählen wir ν größer als den größten der Indizes $\lambda_1 \ldots \lambda_\varrho$, den wir mit λ bezeichnen. Dann ist

$$G_\nu = A_1 G_{\lambda_1} + \ldots + A_\varrho G_{\lambda_\varrho}.$$

Multiplizieren wir dies mit $(QP)^\lambda$, so erhalten wir

$$G_\nu (QP)^\lambda \equiv 0 (\mathfrak{M}),$$

womit ein Widerspruch gegen unsere Voraussetzung gegeben ist. Es folgt also die Isomorphie und daher nach 1. die Gültigkeit der schärferen Relationen (27), (28) mit $X = Q$, $Y = P$.

Vermöge des Satzes VI läßt Satz V auch folgende Fassung zu:

Satz VII[19]): *Ist ein vollständig reduzibler Modul $\mathfrak{M}$ auf zwei Arten als kleinstes gemeinsames Vielfaches von Primmoduln $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k$ bzw. $\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_l$ darstellbar, die je ein total teilerfremdes System bilden, so ist jedes $\mathfrak{P}$ mit mindestens einem $\mathfrak{Q}$ von gleicher Art und umgekehrt. Ist jedes $\mathfrak{P}$ genau mit einem $\mathfrak{Q}$ von gleicher Art, so sind die Zerlegungen identisch. Im anderen Falle sind mindestens zwei der Moduln $\mathfrak{P}$ unter sich und ebenso mindestens zwei der Moduln $\mathfrak{Q}$ unter sich von gleicher Art.*

[19]) Vgl. Loewy, S. 100–101.

§ 10.

Existenz unendlich vieler Zerlegungen einer Gruppe.

Ist die Summendarstellung einer vollständig reduziblen Gruppe nicht eindeutig, so existieren nach Satz V in jeder Darstellung mindestens zwei zueinander isomorphe Untergruppen. Wir betrachten nun die aus einem solchen System isomorpher Untergruppen gebildete Untergruppe $\mathfrak{H} = \mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_a$, wobei also $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_\sigma$ sämtlich isomorph sind, und behaupten, daß $\mathfrak{H}$ alsdann unendlich viele verschiedene derartige Zerlegungen zuläßt, wenn nur im Rationalitätsbereich P unendlich viele „Konstanten", d. h. Größen a enthalten sind, für die $\xi_i a = a\xi_i$ ist. Dieser Satz gilt sogar auch dann, wenn über die Gruppen $\mathfrak{A}_i$ nichts weiter vorausgesetzt wird, nicht einmal Irreduzibilität. Es gilt also

Satz VIII: *Ist $\mathfrak{G}$ als Summe von (endlich vielen) untereinander isomorphen Untergruppen darstellbar, so ist diese Darstellung auf unendlich viele verschiedene Weisen möglich, sobald nur der Rationalitätsbereich P unendlich viele Konstanten enthält. Dabei sind unter Konstanten solche Größen a des Bereichs zu verstehen, für die $\xi_i a = a\xi_i$ ist.*

Beweis: Es sei also $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_a$, und $\mathfrak{A}_i$ zu $\mathfrak{A}_\varkappa$ isomorph für $i, \varkappa = 1, \ldots, \alpha (\alpha \geqq 2)$. Um eine bestimmte isomorphe Zuordnung anzugeben, zeichnen wir vorerst eine Untergruppe, etwa $\mathfrak{A}_1$, aus. Die Isomorphie zwischen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_i$ möge festgelegt sein durch

$$\mathfrak{a}_1 \sim \mathfrak{t}_{1\varkappa}\mathfrak{a}_\varkappa; \quad \mathfrak{a}_i \sim \mathfrak{t}_{i1}\mathfrak{a}_1; \quad \mathfrak{t}_{11}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1 \qquad (i, \varkappa = 1, \ldots, \alpha), \tag{31}$$

wobei also in der Gruppe $\mathfrak{A}_1$ jede Restklasse sich selbst zugeordnet ist. Wegen $M\mathfrak{a}_1 = 0$, $M\mathfrak{a}_i = 0$ folgt dann $M\mathfrak{t}_{1\varkappa}\mathfrak{a}_\varkappa = 0$, $M\mathfrak{t}_{i1}\mathfrak{a}_1 = 0$; die Klassen $\mathfrak{t}_{1\varkappa}\mathfrak{a}_\varkappa$, $\mathfrak{t}_{i1}\mathfrak{a}_1$ lassen daher analog den Einheiten die Multiplikation mit Klassen, nicht nur mit Polynomen zu. Aus der Definition der Isomorphie folgt dann für zwei zugeordnete Klassen $\mathfrak{y}$ und $\bar{\mathfrak{y}}$, die diese Klassenmultiplikation zulassen, daß $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{y}}$ wiederum zugeordnete Klassen sind. Daher ergeben die Relationen $\mathfrak{a}_r\mathfrak{a}_s = 0$ $(r \neq s)$ $(r = 1, \ldots, \alpha;$ $s = 1, \ldots, \alpha)$ für $s = 1$

$$\left\{\begin{array}{ll} & \mathfrak{a}_r\mathfrak{t}_{1\varkappa}\mathfrak{a}_\varkappa = 0 \qquad (\varkappa = 1, \ldots, \alpha,\ r \neq 1) \\ \text{und für } s > 1 & \\ & \mathfrak{a}_r\mathfrak{t}_{s1}\mathfrak{a}_1 = 0 \qquad (r \neq s), \\ \text{also auch} & \\ & \mathfrak{t}_{1\varkappa}\mathfrak{a}_\varkappa = \mathfrak{a}_1\mathfrak{t}_{1\varkappa}\mathfrak{a}_\varkappa; \quad \mathfrak{t}_{i1}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_i\mathfrak{t}_{i1}\mathfrak{a}_1. \end{array}\right. \tag{32}$$

Ferner folgt aus (31), in Verallgemeinerung von (27) und (28), aus der Eindeutigkeit der Zuordnung

$$\mathfrak{t}_{1i}\mathfrak{t}_{i1}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1; \quad \mathfrak{t}_{\varkappa 1}\mathfrak{t}_{1\varkappa}\mathfrak{a}_\varkappa = \mathfrak{a}_\varkappa. \tag{33}$$

Als Isomorphie zwischen $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{A}_\varkappa$ sei nun die durch Zusammensetzung von (31) entstehende Beziehung festgelegt; eine solche Festlegung ist nötig, da die einzelnen Gruppen Isomorphien in sich gestatten können. Aus (31), (32) und (33) kommt somit

$$(34) \qquad a_i \sim t_{i1} t_{1\varkappa} a_\varkappa = t_{i\varkappa} a_\varkappa; \quad t_{ii} a_i = a_i; \quad a_r t_{s\varkappa} a_\varkappa = 0 \qquad (r \neq s),$$

wobei also $t_{i1} t_{1\varkappa} = t_{i\varkappa}$ gesetzt ist. Aus (33) und (34) ergibt sich weiter

$$t_{i\varkappa} t_{\varkappa l} a_l = t_{i1} t_{1\varkappa} t_{\varkappa 1} t_{1l} a_l = t_{i1} t_{11} a_l = t_{il} a_l;$$

hierdurch ist die Auszeichnung der Gruppe $\mathfrak{A}_1$ wieder aufgehoben. Die isomorphe Beziehung zwischen $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{A}_l$ bleibt dieselbe, welche Gruppe $\mathfrak{A}_\varkappa$ auch an Stelle von $\mathfrak{A}_1$ zur Definition benutzt wird. Die $t_{i\varkappa}$ sind also Klassen, die zusammenfassend den Relationen genügen:

$$(35) \quad M t_{i\varkappa} a_\varkappa = 0; \; a_r t_{i\varkappa} a_\varkappa = 0 \; (r \neq i); \; t_{i\varkappa} t_{\varkappa l} a_l = t_{il} a_l; \; t_{\varkappa\varkappa} a_\varkappa = t_{\varkappa i} t_{i\varkappa} a_\varkappa = a_\varkappa.$$

Diese Relationen besagen genau, daß die zu $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{A}_\varkappa$ gehörenden Moduln $\mathfrak{M}_i$ und $\mathfrak{M}_\varkappa$ von gleicher Art sind (vgl. die Definition des § 9); an Stelle der dortigen P und Q treten hier die Klassen $t_{i\varkappa}$ bzw. $t_{\varkappa i}$ und die ersten beiden Relationen (35) zusammengenommen entsprechen der Formel (25) bzw. (26). Umgekehrt folgt aus diesen Relationen nach Satz VI die Isomorphie[20]).

Aus den Klassen $t_{i\varkappa} a_\varkappa$ lassen sich nun Klassen $\mathfrak{b}_\varrho$ zusammensetzen, die sich wieder als Einheiten von Gruppen $\mathfrak{B}_\varrho$ ergeben werden, woraus eine Darstellung $\mathfrak{G} = \mathfrak{B}_1 + \ldots + \mathfrak{B}_\alpha$ folgen wird. Seien nämlich $\lambda_{i\varkappa}$ Konstante, deren Determinante $|\lambda_{i\varkappa}| \neq 0$ ist, $\lambda^{i\varkappa}$ die entsprechenden Unterdeterminanten, dividiert durch $|\lambda_{i\varkappa}|$; so daß also die Relationen bestehen

$$(36) \qquad \begin{cases} \sum_{r=1}^{\alpha} \lambda_{ri} \lambda^{r\varkappa} = \delta_{i\varkappa} = \begin{cases} 0 & i \neq \varkappa \\ 1 & i = \varkappa \end{cases} \\ \sum_{r=1}^{\alpha} \lambda_{ir} \lambda^{\varkappa r} = \delta_{i\varkappa}. \end{cases}$$

Dann definieren wir

$$(37) \qquad \mathfrak{b}_\varrho = \sum_{i,\varkappa} \lambda_{\varrho i} \lambda^{\varrho\varkappa} t_{i\varkappa} a_\varkappa \qquad (\varrho = 1, \ldots, \alpha).$$

Aus (35), (36) und (37) folgt dann $M \mathfrak{b}_\varrho = 0$ und

$$(38) \qquad \sum_{\varrho=1}^{\alpha} \mathfrak{b}_\varrho = \sum_{i,\varkappa,\varrho} \lambda_{\varrho i} \lambda^{\varrho\varkappa} t_{i\varkappa} a_\varkappa = \sum_{i,\varkappa} \delta_{i\varkappa} t_{i\varkappa} a_\varkappa = \sum_i t_{ii} a_i = \sum_i a_i = \mathfrak{e},$$

[20]) Und zwar ohne Anwendung des Endlichkeitssatzes, da die Formeln schon jeweils eine Abbildung $\varphi_{i\varkappa}$ und ihre Umkehrung $\varphi_{\varkappa i}$ darstellen. Wegen $\sum a_l = \sum a_l t_{i\varkappa} a_\varkappa t_{\varkappa l} a_l$ folgt nämlich aus $\sum a_l \neq 0$ auch $\sum a_l t_{i\varkappa} a_\varkappa \neq 0$.

erner

$$\mathfrak{b}_\varrho \mathfrak{b}_\sigma = \sum_{\substack{i,\varkappa \\ \mu,\nu}} \lambda_{\varrho i} \lambda^{\varrho\varkappa} \lambda_{\sigma\mu} \lambda^{\sigma\nu} t_{i\varkappa} \mathfrak{a}_\varkappa t_{\mu\nu} \mathfrak{a}_\nu = \sum_{\substack{i,\mu \\ \nu}} \lambda_{\varrho i} \lambda^{\varrho\mu} \lambda_{\sigma\mu} \lambda^{\sigma\nu} t_{i\nu} \mathfrak{a}_\nu$$

$$= \delta_{\sigma\varrho} \sum_{i,\nu} \lambda_{\varrho i} \lambda^{\sigma\nu} t_{i\nu} \mathfrak{a}_\nu = \begin{cases} 0 & (\varrho \neq \sigma) \\ \mathfrak{b}_\varrho & (\varrho = \sigma) \end{cases} \qquad (\varrho, \sigma = 1, \ldots, \alpha).$$

Die Darstellung $\mathfrak{x} e = \mathfrak{x}\mathfrak{b}_1 + \ldots + \mathfrak{x}\mathfrak{b}_\varrho$ ist also eine additive Zerlegung er Gruppe $\mathfrak{G}$. Dabei sind die Gruppen $\mathfrak{B}_\varrho$ verschieden von den Gruppen $\mathfrak{A}_\sigma$, sobald die $\lambda_{i\varkappa}$ nicht nur eine Diagonalmatrix bilden. Denn bilden wir $\mathfrak{a}_\sigma \mathfrak{b}_\varrho$, so kommt nach (35):

$$\mathfrak{a}_\sigma \mathfrak{b}_\varrho = \sum_{i,\varkappa} \lambda_{\varrho i} \lambda^{\varrho\varkappa} \mathfrak{a}_\sigma t_{i\varkappa} \mathfrak{a}_\varkappa = \lambda_{\varrho\sigma} \sum_{\varkappa} \lambda^{\varrho\varkappa} t_{\sigma\varkappa} \mathfrak{a}_\varkappa \neq 0 \quad \text{für} \quad \lambda_{\varrho\sigma} \neq 0,$$

a in der letzten Summe sonst jeder einzelne Summand verschwinden müßte, was nicht der Fall ist. Gibt es also zu festem σ mindestens zwei , so daß $\lambda_{\varrho\sigma} \neq 0$, so kann $\mathfrak{A}_\sigma$ mit keinem $\mathfrak{B}_\varrho$ identisch sein.

Nun sind aber auch die Gruppen $\mathfrak{B}_\varrho$ unter sich und zu den Gruppen $\mathfrak{A}_\sigma$ isomorph. Dazu zeigen wir zunächst die Existenz von Klassen $\mathfrak{r}_{\varrho\sigma}\mathfrak{a}_\sigma$ nd $\mathfrak{r}^{\sigma\varrho}\mathfrak{b}_\varrho$, die die Isomorphie von $\mathfrak{A}_\sigma$ und $\mathfrak{B}_\varrho$ vermitteln ($\varrho, \sigma = 1, \ldots, \alpha$). Vir weisen nämlich nach, daß für die Klassen

$$\mathfrak{r}_{\varrho\sigma}\mathfrak{a}_\sigma = \sum_i \lambda_{\varrho i} t_{i\sigma} \mathfrak{a}_\sigma \quad \text{und} \quad \mathfrak{r}^{\sigma\varrho} = \sum_\varkappa \lambda^{\varrho\varkappa} t_{\sigma\varkappa} \mathfrak{a}_\varkappa = \mathfrak{r}^{\sigma\varrho}\mathfrak{b}_\varrho$$ [21])

ie Relationen „der gleichen Art" zwischen den Moduln

$$(\mathfrak{M}, \mathfrak{b}_1 + \ldots + \mathfrak{b}_{\varrho-1} + \mathfrak{b}_{\varrho+1} + \ldots + \mathfrak{b}_\alpha)$$

nd

$$(\mathfrak{M}, \mathfrak{a}_1 + \ldots + \mathfrak{a}_{\sigma-1} + \mathfrak{a}_{\sigma+1} + \ldots + \alpha_\sigma)$$

rfüllt sind:

39) $$\begin{cases} \mathfrak{b}_\varkappa \mathfrak{r}_{\varrho\sigma}\mathfrak{a}_\sigma = 0 \quad (\varkappa \neq \varrho); \quad \mathfrak{r}^{\sigma\varrho}\mathfrak{r}_{\varrho\sigma}\mathfrak{a}_\sigma = \mathfrak{a}_\sigma \text{ [22])}, \\ \mathfrak{a}_\varkappa \mathfrak{r}^{\sigma\varrho}\mathfrak{b}_\varrho = 0 \quad (\varkappa \neq \sigma); \quad \mathfrak{r}_{\varrho\sigma}\mathfrak{r}^{\sigma\varrho}\mathfrak{b}_\varrho = \mathfrak{b}_\varrho \end{cases},$$

oraus wie bei (35) die Isomorphie folgt vermöge der Zuordnung

40) $$\mathfrak{b}_\varrho \sim \mathfrak{r}_{\varrho\sigma}\mathfrak{a}_\sigma; \quad \mathfrak{a}_\sigma \sim \mathfrak{r}^{\sigma\varrho}\mathfrak{b}_\varrho.$$

In der Tat kommt:

$$\mathfrak{r}_{\varrho\sigma}\mathfrak{a}_\sigma = \sum_{\substack{\mu,\nu \\ i}} \lambda_{\varkappa\mu} \lambda^{\varkappa\nu} t_{\mu\nu} \mathfrak{a}_\nu \cdot \lambda_{\varrho i} t_{i\sigma} \mathfrak{a}_\sigma = \sum_{\mu,i} \lambda_{\varkappa\mu} \lambda^{\varkappa i} \lambda_{\varrho i} t_{\mu\sigma} \mathfrak{a}_\sigma = \delta_{\varrho\varkappa} \sum_\mu \lambda_{\varkappa\mu} t_{\mu\sigma} \mathfrak{a}_\sigma$$

$$= \delta_{\varrho\varkappa} \mathfrak{r}_{\varkappa\sigma}\mathfrak{a}_\sigma = 0 \qquad (\varkappa \neq \varrho),$$

[21]) Wegen (37) ist

$$\mathfrak{r}^{\sigma\varrho}\mathfrak{b}_\varrho = \sum_{\varkappa,i,\mu} \lambda^{\varrho\varkappa} t_{\sigma\varkappa} \mathfrak{a}_\varkappa \lambda_{\varrho i} \lambda^{\varrho\mu} t_{i\mu} \mathfrak{a}_\mu = \sum_{\varkappa,\mu} \lambda^{\varrho\varkappa} \lambda_{\varrho\varkappa} \lambda^{\varrho\mu} t_{\sigma\mu} \mathfrak{a}_\mu = \sum_\mu \lambda^{\varrho\mu} t_{\sigma\mu} \mathfrak{a}_\mu = \mathfrak{r}^{\sigma\varrho}.$$

[22]) Die Anzahl der Formeln ist gegen (35) verdoppelt, da die Umkehrung nicht ie dort durch Vertauschung der Indizes erfolgt.

ferner

$$\mathfrak{r}^{\sigma\varrho}\mathfrak{r}_{\varrho\sigma}\mathfrak{a}_\sigma = \sum_{\varkappa,i}\lambda^{\varrho\varkappa}\mathfrak{t}_{\sigma\varkappa}\mathfrak{a}_\varkappa\cdot\lambda_{\varrho i}\mathfrak{t}_{i\sigma}\mathfrak{a}_\sigma = \sum_i\lambda^{\varrho i}\lambda_{\varrho i}\mathfrak{t}_{\sigma\sigma}\mathfrak{a}_\sigma = \mathfrak{a}_\sigma.$$

Ebenso findet man umgekehrt:

$$\mathfrak{a}_\varkappa\mathfrak{r}^{\sigma\varrho}\mathfrak{b}_\varrho = \mathfrak{a}_\varkappa\sum_\mu\lambda^{\varrho\mu}\mathfrak{t}_{\sigma\mu}\mathfrak{a}_\mu = 0 \qquad (\varkappa \neq \sigma),$$

ferner

$$\mathfrak{r}_{\varrho\sigma}\mathfrak{r}^{\sigma\varrho}\mathfrak{b}_\varrho = \sum_{i,\mu}\lambda_{\varrho i}\mathfrak{t}_{i\sigma}\mathfrak{a}_\sigma\lambda^{\varrho\mu}\mathfrak{t}_{\sigma\mu}\mathfrak{a}_\mu = \sum_{i,\mu}\lambda_{\varrho i}\lambda^{\varrho\mu}\mathfrak{t}_{i\mu}\mathfrak{a}_\mu = \mathfrak{b}_\varrho.$$

Aus den hiermit bewiesenen Relationen der gleichen Art folgt nun (wiederum ohne Endlichkeitssatz) die Isomorphie von $\mathfrak{A}_\sigma$ und $\mathfrak{B}_\varrho$. Die Isomorphie zwischen $\mathfrak{B}_\varrho$ und $\mathfrak{B}_\tau$ findet man hieraus durch Zusammensetzung, wofür wir die Formeln noch angeben: Wir setzen

$$\mathfrak{f}_{\varrho\tau}\mathfrak{b}_\tau = \mathfrak{r}_{\varrho\varkappa}\mathfrak{r}^{\varkappa\tau}\mathfrak{b}_\tau = \sum_{i,j}\lambda_{\varrho i}\mathfrak{t}_{i\varkappa}\mathfrak{a}_\varkappa\cdot\lambda^{\tau j}\mathfrak{t}_{\varkappa j}\mathfrak{a}_j = \sum_{i,j}\lambda_{\varrho i}\lambda^{\tau j}\mathfrak{t}_{ij}\mathfrak{a}_j;$$

dann lautet die Zuordnung $\mathfrak{b}_\varrho \sim \mathfrak{f}_{\varrho\tau}\mathfrak{b}_\tau$. Auch hier lassen sich die Relationen der gleichen Art wieder formal nachweisen; die $\mathfrak{f}_{\varrho\tau}$ erfüllen, an Stelle von $\mathfrak{t}_{i\varkappa}$ gesetzt, die Relationen (35). In der Tat ist

$$\mathfrak{b}_\sigma\mathfrak{f}_{\varrho\tau}\mathfrak{b}_\tau = \mathfrak{b}_\sigma\mathfrak{r}_{\varrho\varkappa}\mathfrak{r}^{\varkappa\tau}\mathfrak{b}_\tau = 0 \qquad (\sigma \neq \varrho).$$

$$\mathfrak{f}_{\varrho\sigma}\mathfrak{f}_{\sigma\tau}\mathfrak{b}_\tau = \mathfrak{r}_{\varrho\varkappa}\mathfrak{r}^{\varkappa\sigma}\mathfrak{r}_{\sigma\varkappa}\mathfrak{r}^{\varkappa\tau}\mathfrak{b}_\tau = \mathfrak{r}_{\varrho\varkappa}\mathfrak{a}_\varkappa\mathfrak{r}^{\varkappa\tau}\mathfrak{b}_\tau = \mathfrak{f}_{\varrho\tau}\mathfrak{b}_\tau.$$

Damit ist Satz VIII *bewiesen*, da man nur die $\lambda_{i\varkappa}$ auf unendlich viele Weisen so anzunehmen braucht, daß sie keine Diagonalmatrix bilden und sich auch nicht durch eine Diagonalmatrix ineinander transformieren lassen.

Eine Folge von Satz VIII, in Verbindung mit Satz V bzw. VII ist

Satz IX[23]): *Ist der Modul* $\mathfrak{M}$ *vollständig reduzibel und kleinstes gemeinsames Vielfaches der Primmoduln* $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k$, *die ein total teilerfremdes System bilden, und enthält der Rationalitätsbereich* P *unendlich viele Konstanten, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß* $\mathfrak{M}$ *auf unendlich viele verschiedene Weisen als kleinstes gemeinsames Vielfaches von Primmoduln darstellbar ist, daß mindestens zwei der Moduln* $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k$ *von der gleichen Art sind.*

Wir wollen nun allgemeine Kriterien dafür ableiten, daß ein Modul $\mathfrak{M}$ durch unendlich viele Primmoduln teilbar ist, und beweisen dazu zunächst folgenden

Hilfssatz[24]): *Ist ein vollständig reduzibler Modul* $\mathfrak{M} = [\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k]$ *durch einen von allen* $\mathfrak{P}_i$ *verschiedenen Primmodul* $\mathfrak{P}'$ *teilbar, so sind wenigstens zwei der* $\mathfrak{P}_i$ *von gleicher Art.*

---

[23]) Vgl. Loewy, S. 106–107.

[24]) Vgl. Loewy, S. 96.

Wir suchen zunächst aus $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k$ ein total teilerfremdes System eraus, indem wir der Reihe nach jeden dieser Primmoduln streichen, er im kleinsten gemeinsamen Vielfachen der noch nicht gestrichenen auf-eht. Daher sei jetzt angenommen, daß $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k$ selbst ein total eilerfremdes System bilden. Es sei $\mathfrak{a}'$ eine der Einheitsklasse mod $\mathfrak{P}'$ ugeordnete Klasse von $\mathfrak{M}$. Dann ist

$$F\mathfrak{a}' = F\mathfrak{a}'\mathfrak{a}_1 + \ldots + F\mathfrak{a}'\mathfrak{a}_k$$

ir jedes Polynom F. Von den Produkten $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}_i$ sind wenigstens zwei von Tull verschieden, etwa $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}_2$; wäre nämlich etwa nur $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}_1 \neq 0$, o wäre $F\mathfrak{a}' = F\mathfrak{a}'\mathfrak{a}_1$, und die Restklassen $F\mathfrak{a}'$ bildeten eine Untergruppe on $\mathfrak{A}_1$, wären also, da $\mathfrak{A}_1$ Primgruppe ist, mit $\mathfrak{A}_1$ identisch, so daß uch die Moduln $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}_1$ übereinstimmten. Nach der Schlußweise von 8 folgt somit die Isomorphie von $\mathfrak{A}'$ mit $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$.

Es sei jetzt $\mathfrak{M}$ ein beliebiger Modul. Dann betrachten wir das leinste gemeinsame Vielfache $\mathfrak{N}$ aller Primmoduln, durch die $\mathfrak{M}$ teilbar t[25]). Es sind dann zwei Fälle möglich. Entweder ist $\mathfrak{N}$ nicht dar-tellbar als kleinstes gemeinsames Vielfaches von endlich vielen Prim-oduln; in diesem Falle besitzt $\mathfrak{N}$, also auch $\mathfrak{M}$, unendlich viele Prim-oduln als Teiler. Oder $\mathfrak{N}$ ist darstellbar als kleinstes gemeinsames ielfaches von endlich vielen Primmoduln, dann heißt $\mathfrak{N}$ der *größte voll-tändig reduzible Modul* von $\mathfrak{M}$ (im Anschluß an eine entsprechende ildung von Loewy). Sind nun unter diesen endlich vielen Primmoduln wei von der gleichen Art, so ist nach Satz IX der Modul $\mathfrak{N}$ und folglich $\mathfrak{M}$ urch unendlich viele Primmoduln teilbar. Ist letzteres umgekehrt der Fall, o gibt es mindestens einen Primteiler von $\mathfrak{N}$, der von all den endlich ielen verschieden ist, als deren kleinstes gemeinsames Vielfaches $\mathfrak{N}$ dar-tellbar ist. Nach dem Hilfssatz besitzt dann $\mathfrak{N}$, also $\mathfrak{M}$, zwei Primteiler er gleichen Art. Wir haben damit folgenden Satz bewiesen:

Satz X: *Enthält der Rationalitätsbereich* P *unendlich viele Kon-tanten, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß in Modul durch unendlich viele verschiedene Primmoduln teilbar ist, ie, daß entweder kein größter vollständig reduzibler Modul existiert, der wenn ein solcher existiert, daß er durch mindestens zwei verschiedene Primmoduln von der gleichen Art teilbar ist.*

---

[25]) Sind dies unendlich viele, so kann dieser Darstellung nach Satz IV keine additive erlegung der Restgruppe entsprechen. Vgl. übrigens das Beispiel § 12, 4.

§ 11.

Beziehungen zu den Systemen von Differentialgleichungen und ihren Integralen.

Vermöge des Endlichkeitssatzes kann jedem Modul von Differentialausdrücken ein System von endlich vielen Differentialausdrücken als Basis zugeordnet werden, so daß die Gesamtheit der simultanen Integrale aller Differentialgleichungen, die durch Nullsetzen eines Differentialausdrucks des Moduls entstehen, übereinstimmt mit der Gesamtheit der Integrale des endlichen Systems von Differentialgleichungen, das sich durch Nullsetzen der Basisdifferentialausdrücke ergibt. Hiermit ist der Anschluß an die Theorie der Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen gegeben; wir verfolgen diesen Zusammenhang noch ein wenig in dem Falle, daß die Restgruppe des Moduls eine „endliche" ist.

Definition: *Eine Restgruppe heißt endlich, wenn es eine Zahl μ gibt, die Ordnung der Gruppe, so daß zwischen je $\mu + 1$ Restklassen eine lineare Relation mit Koeffizienten aus* P *besteht, während mindestens ein System von μ Restklassen vorhanden ist, zwischen denen keine Relation besteht, und das wir als eine lineare Basis der Restgruppe bezeichnen wollen. Im anderen Falle heißt die Restgruppe unendlich.*

Die Summe zweier endlicher Restgruppen hat endliche Ordnung, und zwar die Summe der Ordnungen. Die Summe zweier unendlicher Gruppen oder einer endlichen und einer unendlichen Gruppe ist eine unendliche Gruppe. Beispiele von endlichen Gruppen bilden alle Restgruppen von Moduln einer Variablen; aber auch für mehrere Variable kann die Ordnung endlich werden, z. B. für den Modul mit der Basis ξ_1^2, ξ_2^2, wo alle Restklassen aus denen von 1, ξ_1, ξ_2, $\xi_1 \xi_2$ linear zusammengesetzt werden können. Beispiele von unendlichen Gruppen siehe § 12.

Es gilt nun folgender

Satz XI: *Besitzt ein Modul eine endliche Restgruppe, so läßt jedes System von Differentialgleichungen, das durch Nullsetzen einer Basis des Moduls entsteht, genau so viel linear unabhängige Integrale zu, als die Ordnung seiner Restgruppe angibt. Umgekehrt ist für ein gegebenes System von endlich vielen linearen partiellen Differentialgleichungen, die nur eine endliche Anzahl von linear unabhängigen Integralen besitzen, diese Anzahl gleich der Ordnung der Restgruppe des durch die Differentialausdrücke erzeugten Moduls.*

Der Rationalitätsbereich P bestehe hier aus analytischen Funktionen von n Variablen $x_1, \ldots, x_n$, bei denen die vorkommenden Singularitäten innerhalb eines gewissen n-dimensionalen Gebietes höchstens Mannig-

altigkeiten niedrigerer Dimensionen bilden, so daß es also beliebig viele Punkte mit regulärer n-dimensionaler Umgebung gibt.

Es sei nun $\mathfrak{M}$ ein Modul mit endlicher Restgruppe; wir zeigen dann, daß es eine lineare Basis aus Potenzprodukten von der Eigenschaft gibt, daß *bei den Ausdrücken einer beliebigen Restklasse durch diese Basis nur Potenzen von endlich vielen verschiedenen Größen aus* P *im Nenner auftreten können.*

Zu diesem Zwecke ordnen wir alle Potenzprodukte $\xi_1^{a_1} \dots \xi_n^{a_n}$ lexikographisch und nehmen als Repräsentanten $Q_1, \dots, Q_m$ der Restklassen alle diejenigen auf, die von den vorangehenden mod $\mathfrak{M}$ linear unabhängig sind. (Nach Voraussetzung sind dies nur endlich viele.) Alle übrigen lassen sich durch diese linear ausdrücken.

Nun sei $\mathfrak{S}$ das System aller nicht in die lineare Basis aufgenommenen Potenzprodukte. Dann besitzt $\mathfrak{S}$ nach dem ersten Teil des Beweises von Satz III ein *endliches* Teilsystem $\mathfrak{T}$ von solchen Potenzprodukten, daß jedes Potenzprodukt aus $\mathfrak{S}$ durch mindestens eines aus $\mathfrak{T}$ teilbar ist. Seien nun $P_1, \dots, P_\varrho$ die Potenzprodukte von $\mathfrak{T}$, und $M_1 \equiv 0, \dots, M_\varrho \equiv 0\ (\mathfrak{M})$ die Relationen, vermöge deren $P_1, \dots, P_\varrho$ jeweils durch eine lineare Verbindung von niedrigeren Potenzprodukten mod $\mathfrak{M}$ ausgedrückt werden; also z. B.

$$M_i = b_i P_i + \text{niedrigere Glieder.}$$

Ist nun P ein beliebiges Potenzprodukt aus $\mathfrak{S}$, also von der Form

$$\xi_1^{h_1} \dots \xi_n^{h_n} P_i,$$

so folgt

$$\begin{aligned} \xi_1^{h_1} \dots \xi_n^{h_n} M_i &= b_i \xi_1^{h_1} \dots \xi_n^{h_n} P_i + \text{niedrigere Glieder} \\ &= b_i P + \text{niedrigere Glieder.} \end{aligned}$$

Nehmen wir nun als bewiesen an, daß bei allen niedrigeren Potenzprodukten als P nur Potenzen von $b_1, \dots, b_\varrho$ im Nenner auftreten, während die Zähler aus den Koeffizienten der M_i durch Addition, Multiplikation und Differentiation gebildet sind, so gilt dies auch von P selbst. Diese Annahme ist aber erlaubt, da sie für P_1, das erste Element aus $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$, erfüllt ist.

Nach Satz III ist ferner $M_1, \dots, M_\varrho$ eine Modulbasis von $\mathfrak{M}$. Betrachten wir nun ein solches Wertsystem $\beta_1, \dots, \beta_n$ von $x_1, \dots, x_n$, für das $b_1 \neq 0, \dots, b_\varrho \neq 0$ und die übrigen Koeffizienten der M_i regulär sind, also eine reguläre Stelle des Systems von Differentialgleichungen $M_1 = 0, \dots, M_\varrho = 0$. Den Potenzprodukten $Q_i = \xi_1^{h_{i1}} \dots \xi_n^{h_{in}}\ (i = 1, \dots, m)$ entsprechen dann die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial^{h_{i1} + \dots + h_{in}}}{\partial x_1^{h_{i1}} \dots \partial x_n^{h_{in}}} y$, für die wir

beliebige konstante Werte $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ an der Stelle $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ vorgeben. Dann sind durch die Differentialgleichungen $M_i = 0$ die Werte aller höheren Ableitungen von y als endliche Werte an dieser Stelle eindeutig bestimmt, da nur die b_i im Nenner auftreten und man zeigt bekanntlich, daß hieraus die Existenz von m linear unabhängigen analytischen Integralen folgt.

Andererseits können unter unseren Voraussetzungen nicht mehr als m linear unabhängige Integrale existieren, denn sonst könnte man bekanntlich an einer regulären Stelle die Werte von $m + 1$ passend gewählten Ableitungen willkürlich vorschreiben, was dem widerspricht, daß zwischen je $(m + 1)$ Potenzprodukten lineare Abhängigkeiten mod $\mathfrak{M}$ bestehen sollen.

Hat umgekehrt ein Modul eine unendliche Restgruppe, so zeigt man auf demselben Wege, daß es unendlich viele lineare unabhängige Integrale gibt; im Falle von nur m linear unabhängigen Integralen ist daher die Restgruppe endlich, also ihre Ordnung nach dem obigen gleich m.

Wir zeigen zum Schluß dieses Paragraphen, daß der Begriff der Isomorphie oder, was dasselbe ist, der gleichen Art, bei zwei Moduln aus Differentialausdrücken für die Integrale der zugeordneten Systeme von Differentialgleichungen dieselbe Bedeutung hat wie der von Poincaré benutzte Artbegriff für eine Variable (vgl. Blumberg a. a. O., Anhang I).

Satz XII. *Sind zwei Moduln $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ aus Differentialausdrücken von der gleichen Art, so gibt es zwei Differentialausdrücke P und Q, so daß $P(y)$ und $Q(z)$ alle Integrale von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M}$ durchläuft, wenn y alle Integrale von $\mathfrak{M}$, und z alle Integrale von $\mathfrak{N}$ durchläuft.*

Nach Voraussetzung bestehen nämlich (nach § 9) für zwei passend gewählte Polynome P und Q die Beziehungen

$$MQ \equiv 0\,(\mathfrak{N}) \qquad PQ \equiv 1\,(\mathfrak{N})$$
$$NP \equiv 0\,(\mathfrak{M}) \qquad QP \equiv 1\,(\mathfrak{M}).$$

Daher ist wegen $NP(y) = 0$ die Funktion $P(y)$ ein Integral von $\mathfrak{N}$. Ebenso ist $Q(z)$ ein Integral von $\mathfrak{M}$. Wegen $PQ(z) = z$ und $QP(y) = y$ durchläuft $P(y)$ alle Integrale von $\mathfrak{N}$, $Q(z)$ alle Integrale von $\mathfrak{M}$. Dabei entspricht jedem von Null verschiedenen y auch ein von Null verschiedenes z und umgekehrt.

§ 12.

Beispiele.

1. Als erstes Beispiel betrachten wir eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung 2. Ordnung, deren Koeffizienten als symmetrische Funktionen der Integrale dargestellt seien. Der Rationalitätsbereich P besteht

ier aus allen rationalen Funktionen der Integrale und ihrer Ableitungen, obei wir uns auf eine genügend kleine Umgebung eines regulären Punktes er Differentialgleichung beschränken. Wir definieren den Modul $\mathfrak{M}$ als esamtheit von allen Differentialausdrücken, die y_1 und y_2 zu Integralen aben, und für die wir wieder Polynome in einer Unbestimmten ξ schreiben. ie Modulbasis ist dann eingliedrig, und zwar gegeben durch das Polynom

$$M = \begin{vmatrix} y_1 y_2 \\ y_1' y_2' \end{vmatrix} \xi^2 - \begin{vmatrix} y_1 y_2 \\ y_1'' y_2'' \end{vmatrix} \xi + \begin{vmatrix} y_1' y_2' \\ y_1'' y_2'' \end{vmatrix},$$

as bis auf eine Größe aus P als Faktor eindeutig bestimmt ist.

Nun ist

41) $$\mathfrak{M} = [\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2],$$

obei $\mathfrak{M}_i$ aus allen Differentialausdrücken besteht, die das Integral y_i be- tzen und dessen Basis bis auf einen Faktor aus P bestimmt ist durch

$$M_i = y_i \xi - y_i' \qquad (i = 1, 2).$$

n der Tat ist $\mathfrak{M}$ teilbar durch $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$, da es für die Integrale y_1 nd y_2 verschwindet, also durch $[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2]$ teilbar, und weil die Ordnung es Basispolynoms von $[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2]$ mindestens 2 sein muß, so ist $= [\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2]$. Ferner sind $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ teilerfremd, wegen

42) $$\frac{y_2}{D}(y_1 \xi - y_1') - \frac{y_1}{D}(y_2 \xi - y_2') = 1 \quad \left(D = D(y) = \begin{vmatrix} y_1 y_2 \\ y_1' y_2' \end{vmatrix}\right).$$

ußerdem sind sie Primmoduln, da ihre Restgruppe die Ordnung 1 hat.

Nun hat aber $\mathfrak{M}$ neben y_1 und y_2 auch alle Integrale

$$z_1 = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \qquad A = |a_{ik}| \neq 0,$$
$$z_2 = a_{21} y_1 + a_{22} y_2$$

t also identisch mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der beiden ilerfremden Moduln $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$, die jeweils die Integrale z_1 und z_2 be- tzen, deren Basispolynome also gegeben sind durch

$$N_i = z_i \xi - z_i' = (a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2) \xi - (a_{i1} y_1' + a_{i2} y_2').$$

$\mathfrak{N}$ läßt also unendlich viele verschiedene Darstellungen als kleinstes ge- einsames Vielfaches von teilerfremden Primmoduln zu, und nach Satz VII nd daher die beiden Moduln $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ unter sich und mit allen $_1$ und $\mathfrak{N}_2$ von gleicher Art. In der Tat sind die Restgruppen all dieser oduln von der Ordnung 1, also isomorph.

Wir wollen nun die der Darstellung (41) entsprechende additive Zer- gung der Restgruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$ aufstellen. Dazu gehen wir nach § 4 s von der Relation (42), die die Teilerfremdheit von $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ aus-

sagt. Für die Einheiten $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ bekommen wir die durch die Polynome $-\frac{y_1}{D}(y_2\xi - y_2')$ und $\frac{y_2}{D}(y_1\xi - y_1')$ erzeugten Restklassen. Dadurch wird

$$\mathfrak{M}_1 = \left(\mathfrak{M}, \frac{y_2}{D}(y_1\xi - y_1')\right)$$

$$\mathfrak{M}_2 = \left(\mathfrak{M}, -\frac{y_1}{D}(y_2\xi - y_2')\right).$$

Bilden wir nun ebenso die Einheiten $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$, die der Zerlegung $\mathfrak{M} = [\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2]$ entsprechen, indem wir y_i durch z_i ersetzen, so kommt

$$-\frac{z_1}{D(z)}(z_2\xi - z_2') = -\frac{\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2}{AD(y)}((\alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2)\xi - (\alpha_{21}y_1' + \alpha_{22}y_2'))$$

$$\frac{z_2}{D(z)}(z_1\xi - z_1') = \frac{\alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2}{AD(z)}((\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2)\xi - (\alpha_{11}y_1' + \alpha_{12}y_2')),$$

also

$$(43)\quad \begin{cases} \mathfrak{b}_1 = \frac{\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2}{y_1}\left(\frac{\alpha_{22}}{A}\right)\mathfrak{a}_1 + \frac{\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2}{y_2}\left(-\frac{\alpha_{21}}{A}\right)\mathfrak{a}_2 = \frac{z_1}{y_1}\alpha^{11}\cdot\mathfrak{a}_1 + \frac{z_1}{y_2}\alpha^{12}\cdot \\ \mathfrak{b}_2 = \frac{\alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2}{y_1}\left(-\frac{\alpha_{12}}{A}\right)\mathfrak{a}_1 + \frac{\alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2}{y_2}\left(\frac{\alpha_{11}}{A}\right)\mathfrak{a}_2 = \frac{z_2}{y_1}\alpha^{21}\mathfrak{a}_1 + \frac{z_2}{y_2}\alpha^{22}\mathfrak{a}_2 \end{cases}$$

Hierbei ist (α^{ik}) die Reziproke der Matrix (α_{ik}).

Umgekehrt ergibt sich durch Vertauschung von z_i mit y_i

$$(44)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}_1 = \frac{y_1}{z_1}\alpha_{11}\mathfrak{b}_1 + \frac{y_1}{z_2}\alpha_{12}\mathfrak{b}_2, \\ \mathfrak{a}_2 = \frac{y_2}{z_1}\alpha_{21}\mathfrak{b}_1 + \frac{y_2}{z_2}\alpha_{22}\mathfrak{b}_2. \end{cases}$$

Aus diesen Formeln erkennt man die Isomorphie der Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Nach unseren allgemeinen Überlegungen ist nämlich für $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_\sigma \neq 0$ die betreffende Zuordnung $\mathfrak{a}_1 \sim \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_\sigma$, also nach (44)

$$\mathfrak{a}_1 \sim \frac{y_1}{z_\sigma}\alpha_{1\sigma}\mathfrak{b}_\sigma, \quad \text{falls} \quad \alpha_{1\sigma} \neq 0 \text{ ist},$$

und nach (43) ist ebenso

$$\mathfrak{b}_\sigma \sim \frac{z_\sigma}{y_\sigma}\alpha^{\sigma 2}\mathfrak{a}_2, \quad \text{falls} \quad \alpha^{\sigma 2} \neq 0 \text{ ist},$$

also

$$\frac{y_1}{z_\sigma}\alpha_{1\sigma}\mathfrak{b}_\sigma \sim \frac{y_1}{z_\sigma}\alpha_{1\sigma}\frac{z_\sigma}{y_2}\alpha^{\sigma 2}\mathfrak{a}_2 = \frac{y_1}{y_2}\alpha_{1\sigma}\alpha^{\sigma 2}\mathfrak{a}_2.$$

Also ist

$$\mathfrak{a}_1 \sim \alpha_{1\sigma}\alpha^{\sigma 2}\frac{y_1}{y_2}\mathfrak{a}_2 \quad \text{für} \quad \alpha_{1\sigma}\alpha^{\sigma 2} \neq 0, \quad \text{und} \quad \frac{1}{\alpha_{1\sigma}\alpha^{\sigma 2}}\frac{y_2}{y_1}\mathfrak{a}_1 \sim \mathfrak{a}_2,$$

was die Umkehrung darstellt. Ist nun (α_{ik}) keine Diagonalmatrix, so ist diese Bedingung $\alpha_{1\sigma}\alpha^{\sigma 2} \neq 0$ für ein σ stets erfüllt. Der Fall der Diagonal-

atrix ist aber auszuschließen, weil dann die Moduln identisch sind. Ist rner z. B. nur $a_{12} = 0$, so wird $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{B}_1$, aber nicht $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{B}_2$. Aus $_1 + \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{B}_1$ folgt also nicht $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{B}_2$ (vgl. die Anerkung [12])). Die drei Moduln $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ und $\mathfrak{N}_2$ sind dann paarweise ilerfremd, bilden aber kein total teilerfremdes System, da $[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2]$ urch $\mathfrak{N}_2$ teilbar ist (vgl. Anmerkung [15])).

Setzt man ferner $t_{12} = a_{1\sigma} \alpha^{\sigma 2} \frac{y_1}{y_2} a_2$ und $t_{21} = \frac{1}{a_{1\sigma} \alpha^{\sigma 2}} \frac{y_2}{y_1} a_1$, so sind e Relationen (35), wie man durch Ausrechnung bestätigt, erfüllt.

2. Ein Beispiel einer unendlichen Gruppe bildet jeder Modul von mehr s einer Variablen, dessen Basis nur aus einem Polynom besteht. Etwas mplizierter ist das folgende Beispiel, welches zeigen soll, daß unendliche ruppen auch bei mehrgliederigen Moduln auftreten können, d. h. bei lchen, deren Modulbasis mehr als ein Polynom umfaßt[26]):

$$\mathfrak{M} = [(\xi + x\eta),\ (\xi + 1)] = [(P), (Q)] \quad \left(\xi = \frac{\partial}{\partial x},\ \eta = \frac{\partial}{\partial y}\right).$$

ie Multiplikationsregel sei die für Differentialausdrücke. Die Restgruppe ird hier unendlich, weil die Restgruppen von $(\xi + x\eta)$ und $(\xi + 1)$ beide nendlich sind, während die Moduln $(\xi + x\eta)$ und $(\xi + 1)$ teilerfremd nd wegen

$$1 = (-x\xi - x^2\eta + 1)\,Q + (x\xi + x - 1)\,P.$$

lan zeigt nun sehr leicht, daß $\mathfrak{M}$ kein Polynom zweiten Grades besitzt, ndem man ansetzt $(u_1\xi + u_2\eta + u_3)(\xi + x\eta) = (v_1\xi + v_2\eta + v_3)(\xi + 1)$. ieraus ergibt sich $u_1 = u_2 = u_3 = v_1 = v_2 = v_3 = 0$. Sucht man ferner olynome dritten Grades in $\mathfrak{M}$, so findet man zwei linear unabhängige, nd zwar z. B.

$$(\xi^2 + x\xi\eta + \xi + (2 + x)\,\eta)Q = (\xi^2 + 2\xi + 1)P$$

nd

$$(\xi^2 + 2x\xi\eta + x^2\eta^2 + \eta)Q = (\xi^2 + x\xi\eta + \xi + (x - 1)\,\eta)P.$$

Wäre nun $\mathfrak{M}$ ein eingliedriger Modul, so müßten beide durch das asispolynom, und da $\mathfrak{M}$ kein Polynom zweiten Grades enthält, durch ein olynom dritten Grades teilbar sein, sie müßten also proportional sein, as nicht der Fall ist. Die Mehrgliedrigkeit von $\mathfrak{M}$ ist der innere Grund ir das Versagen der im Falle einer Variablen gültigen Produktsätze von andau.

---

[26]) Vgl. das von Blumberg mitgeteilte Beispiel von Landau (a. a. O. S. 51—52). ir bezeichnen hier und im folgenden die unabhängigen Variablen mit x und y.

3. Ein weiteres Beispiel zeige, daß auch bei Primmoduln unendliche Gruppen auftreten können[27]). P sei der Bereich aller *rationalen Funktionen* von zwei Variablen x, y. Der Modul $\mathfrak{M}$ mit der Basis

$$\xi - \frac{y}{x} = \xi - a$$

besitzt eine unendliche Gruppe, da diese die Restklasse jeder Potenz von y enthält; andererseits ist $\mathfrak{M}$ ein Primmodul. In der Tat zeigen wir, daß jeder Teiler

$$\mathfrak{M}_1 = (\xi - a,\ F(\xi, \eta))$$

gleich dem Einheitsmodul wird. Jedes Polynom $F(\xi, \eta)$ kann nämlich mod$(\xi - a)$ durch ein Polynom $G(\eta)$ dargestellt werden:

$$F(\xi, \eta) \equiv c_0 \eta^\nu + c_1 \eta^{\nu-1} + \ldots + c_\nu (\mathfrak{M}).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $c_0 = 1$. Nun ist doch nach dem Multiplikationsgesetz $\xi \eta^\nu - \eta^\nu \xi = 0$; also wird wegen

$$\xi \equiv a\,(\mathfrak{M}_1), \qquad \eta^\nu \equiv F_1\,(\mathfrak{M}_1),$$

wo $F_1 = -(c_1 \eta^{\nu-1} + \ldots + c_\nu)$ gesetzt ist,

$$\xi F_1 - \eta^\nu a \equiv 0\,(\mathfrak{M}_1).$$

Entwickelt man

$$\eta^\nu a = a \eta^\nu + \nu \frac{\partial a}{\partial y} \eta^{\nu-1} + \ldots,$$

ersetzt ferner hierin wieder η^ν durch F_1, so bekommt man

$$\xi (c_1 \eta^{\nu-1} + \ldots + c_\nu) - a (c_1 \eta^{\nu-1} + \ldots + c_\nu) + \nu \frac{\partial a}{\partial y} \eta^{\nu-1} + \ldots \equiv 0\,(\mathfrak{M}_1)$$

oder

$$c_1 \eta^{\nu-1} a + \frac{\partial c_1}{\partial x} \eta^{\nu-1} + \ldots - a c_1 \eta^{\nu-1} + \ldots + \nu \frac{\partial a}{\partial y} \eta^{\nu-1} + \ldots \equiv 0\,(\mathfrak{M}_1)$$

oder endlich

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial x} + \nu \frac{\partial a}{\partial y}\right) \eta^{\nu-1} + \ldots \equiv 0\,(\mathfrak{M}_1).$$

Links steht jetzt ein Polynom in η vom genauen Grade $\nu - 1$, das nicht identisch verschwindet; denn der höchste Koeffizient

$$\frac{\partial c_1}{\partial x} + \nu \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial c_1}{\partial x} + \nu \frac{1}{x} \text{ ist } \neq 0,$$

weil sonst $c_1 = -\nu \log x + \varphi(y)$ nicht rational wäre. Also läßt sich das Verfahren fortsetzen und führt zu einem nicht identisch verschwindenden

[27]) Unsere Definition von „Primmodul" ist verschieden von dem, was man im kommutativen Falle als Primmodul bezeichnet, da dort stets Teiler niedrigerer Mannigfaltigkeit existieren, außer wenn die Mannigfaltigkeit = 0, die Restgruppe also endlich ist.

lynom nullten Grades, womit gezeigt ist, daß auch die Einheit in $\mathfrak{M}_1$ thalten ist[28]).

4. Adjungieren wir andererseits dem Rationalitätsbereich noch die nktion $\log x$, so besitzt $\mathfrak{M}$ die Teiler

$$\left(\xi - \frac{y}{x},\ \eta - \log x + \varphi(y)\right),$$

$\varphi(y)$ alle rationalen Funktionen von y durchläuft. Diese Teiler sind ntlich voneinander verschieden, für jeden ist die Integrabilitätsbedingung üllt und das zugehörige Integral ist $y \log x - \int \varphi(y)\,dy + \alpha$. Daher nn die Einheit nicht im Modul enthalten sein, weil sonst die Funktion ll das einzig mögliche Integral wäre. Andererseits ist ξ und η in bezug f den Modul einer Größe des Bereichs kongruent; daher ist die Restgruppe dlich und von der Ordnung 1. Ferner sind von den unendlich vielen ilern je zwei teilerfremd, und der gegebene Modul $\mathfrak{M}$ ist gleich dem einsten gemeinsamen Vielfachen $\mathfrak{N}$ aller dieser Teiler. In der Tat ist durch alle Teiler, also auch durch $\mathfrak{N}$ teilbar. Wäre nun $\mathfrak{N}$ ein echter iler von $\mathfrak{M}$, so müßte $\mathfrak{N}$ noch mindestens ein Polynom F enthalten, va vom Grade ϱ, das nur von η allein abhängt. Lassen wir nun y) die Funktionen $y, \ldots, y^{\varrho+1}$ durchlaufen, so besteht zwischen den zu- hörigen Integralen $y \log x - \frac{y^{i+1}}{i+1} + \alpha_i (i = 1, \ldots, \varrho + 1)$ keine lineare ziehung mit von y unabhängigen Koeffizienten. Die Differentialgleichung er Ordnung $F = 0$ kann aber nicht $\varrho + 1$ linear unabhängige Integrale itzen.

Der Modul $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ ist aber nicht vollständig reduzibel[29]). Er wäre mlich sonst kleinstes gemeinsames Vielfaches von endlich vielen dieser mmoduln, seine Restgruppe also von endlicher Ordnung, während die stgruppe von $\xi - \frac{y}{x}$ doch die Restklassen aller Potenzen von η enthält, o unendlich ist.

Göttingen, den 1. August 1919.

[28]) Dies Verfahren kommt darauf hinaus, nachzuweisen, daß die für ein System Differentialgleichungen notwendigen Integrabilitätsbedingungen nicht erfüllt sind.

[29]) Hiermit haben wir ein Beispiel für den ersten Fall von Satz X.

(Eingegangen am 4. August 1919.)

Über Potenzreihen, deren Koeffizienten zahlentheoretische Funktionen sind.

Von

G. Szegő in Budapest.

Herr G. Pólya hat mir im Jahre 1915 folgende Vermutung brieflich mitgeteilt:

Hat die Potenzreihe

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

lauter ganzzahlige Koeffizienten und den Konvergenzradius 1, *so stellt sie entweder eine rationale Funktion dar oder sie ist über den Einheitskreis hinaus nicht fortsetzbar, d. h. sie hat den Einheitskreis zur natürlichen Grenze*[1]).

Die Frage, ob diese Vermutung zutrifft oder nicht, ist bis heute unentschieden. Die weitgehendsten Resultate, welche in dieser Hinsicht bisher erreicht wurden, sind folgende:

Ein Satz von Herrn G. Pólya: *Es sei* $R > 1$ *und die Funktion* $f(z)$ *im Kreise* $|z| \leqq R$ *eindeutig und mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von singulären Stellen regulär. Wenn* a_n *für alle n ganz ist, so ist* $f(z)$ *eine rationale Funktion*[2]).

Ein Satz von Herrn F. Hausdorff: *Die Potenzreihen mit lauter ganzzahligen Koeffizienten und dem Konvergenzradius* 1, *die über den Einheitskreis hinaus fortsetzbar sind, bilden eine abzählbare Menge*[3]).

[1]) Man vgl. G. Pólya, Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten, Mathematische Annalen 77 (1916), S. 497–513], S. 510.

[2]) A. a. O. S. 497. Vgl. noch die Arbeiten von R. Jentzsch, G. Pólya, F. Carlson, sämtliche unter dem Titel Über Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten in den Mathematischen Annalen bzw. 78, S. 276–285, 78, S. 286–293, 79, S. 237–245.

[3]) F. Hausdorff, Zur Verteilung der fortsetzbaren Potenzreihen, Mathematische Zeitschrift, 4, S. 98–103.

Der Zweck dieser Arbeit ist die Nichtfortsetzbarkeit über den Einheits-
is hinaus für einige Potenzreihen, deren Koeffizienten gewisse wohl-
annte *zahlentheoretische* Funktionen von n sind, nachzuweisen. Dies
d erreicht durch eine einheitliche Methode, die sich einerseits auf einen
z über Dirichletsche Reihen, andererseits auf gewisse Umformungen
ser Reihen stützt.

Einige der hier untersuchten Reihen sind bereits von anderen Autoren
andelt worden[4]). Für gewisse andere unter ihnen folgt ferner die Eigen-
aft der Nichtfortsetzbarkeit aus allgemeinen Kriterien[5]). Doch glaube
, daß die hier dargelegte Methode ein Interesse verdient, nicht bloß
um, weil sie die Nichtfortsetzbarkeit, welche für die meisten dieser
ihen unbekannt war, liefert, sondern noch mehr darum, weil es immer
rkwürdig ist, wenn zahlentheoretische Betrachtungen auf die Lösung
ktionentheoretischer Fragen führen.

Inhalt.

§ 1. Hilfssätze aus der analytischen Zahlentheorie.
§ 2. Umformung Dirichletscher Reihen.
§ 3. Darstellung der Methode.
§ 4. $\sum_{n=1}^{\infty} z^{p_n}$.
§ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) z^n$.

---

[4]) Die Reihen in den §§ 6 und 7 sind als Lambertsche Reihen darzustellen,
e Nichtfortsetzbarkeit folgt aus gewissen allgemeinen Sätzen über Lambertsche
ihen. Man vgl. J. Franel, Sur la théorie des séries [Mathematische Annalen
(1899), S. 529—549], S. 548; ferner K. Knopp, Über Lambertsche Reihen
urnal für die reine und angewandte Mathematik, 142 (1913), S. 283—315],
313, 314.

Über die Potenzreihen in § 9 hat Fatou bewiesen, daß für sie $z = 1$ singulärer
nkt ist. P. Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor [Acta Mathematica,
(1906), S. 335—400], S. 392.

[5]) Es gilt der Fabrysche Satz:

Die Potenzreihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{m_\nu} z^{m_\nu}$$

den Einheitskreis zur natürlichen Grenze, wenn

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[m_\nu]{|a_{m_\nu}|} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{m_\nu}{\nu} = \infty$$

Dieser Satz führt bei den Reihen in §§ 4, 5 zum Ziele.

§ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} o(n) z^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) z^n$.

§ 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) z^n$.

§ 8. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\nu(n)} z^n$.

§ 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) z^n$.

§ 10. $\sum_{n=1}^{\infty} [\mu(n)]^2 z^n$.

§ 11. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\nu(n)} \lambda(n) z^n$.

§ 1.

Hilfssätze aus der analytischen Zahlentheorie[6]).

Im folgenden bezeichne ich mit k immer eine ungerade Primzahl und mit g eine primitive Wurzel modulo k, d. h. eine solche zu k teilerfremde Zahl, für welche

$$1, g, g^2, \ldots, g^{k-2}$$

inkongruent sind modulo k. Dann gehört zu jeder Zahl m, für welche $(m, k) = 1$ ist, eine ganz bestimmte ν mit der Eigenschaft

$$m \equiv g^\nu \pmod{k} \qquad (0 \leqq \nu \leqq k-2);$$

Ist $m \equiv m' \pmod{k}$, so gehört zu m und m' dieselbe ν. Ich setze $\nu = j_m$.

Ich definiere jetzt gewisse zahlentheoretische Funktionen, die sogenannten *Charaktere* auf folgende Weise: Es sei

$$\varrho = e^{\frac{2\pi}{k-1} i} \quad \text{und} \quad \chi_\alpha(n) = \varrho^{\alpha j_n},$$

wenn n nicht durch k teilbar ist. Andernfalls sei $\chi_\alpha(n) = 0$ (α ist ganz).

Diese Funktionen besitzen folgende elementare Eigenschaften:

a) $\chi_\alpha(n) = \chi_{\alpha'}(n)$ für $\alpha \equiv \alpha' \pmod{k-1}$.

b) $\chi_\alpha(n) = \chi_\alpha(n')$ für $n \equiv n' \pmod{k}$.

c) $\chi_{\alpha+\alpha'}(n) = \chi_\alpha(n)\chi_{\alpha'}(n)$.

---

[6]) Man vgl. E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, 2 Bände, Leipzig und Berlin (B. G. Teubner) 1909. 1, S. 391—417 und S. 475—498. Ich zitiere dieses Buch im folgenden mit H.

d) $\chi_\alpha(nn') = \chi_\alpha(n)\chi_\alpha(n')$.

e) $$\sum_{n=0}^{k-1}\chi_\alpha(n) = \begin{cases} k-1 & \text{für} \quad \alpha = 0, \\ 0 & \text{für} \quad 1 \leqq \alpha \leqq k-2. \end{cases}$$

f) $$\sum_{\alpha=0}^{k-2}\chi_\alpha(n) = \begin{cases} k-1 & \text{für} \quad n \equiv 1 \pmod k, \\ 0 & \text{in allen anderen Fällen.} \end{cases}$$

Ich definiere ferner folgende analytische Funktionen:

$$L_\alpha(s) = L_{\alpha'}(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_\alpha(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-\frac{\chi_\alpha(p)}{p^s}}$$

$$(\alpha = 0, 1, \ldots, k-2;\ \alpha' \equiv \alpha, \bmod k-1),$$

o $s = \sigma + it$ eine komplexe Veränderliche bezeichnet und p alle Prim-hlen durchläuft. Diese Reihen sind sämtlich absolut konvergent, wenn $= \Re s > 1$ ist. Ich zitiere die Hilfssätze: Die Funktion

$$L_0(s) = \left(1 - \frac{1}{k^s}\right)\zeta(s),$$

o $\zeta(s)$ die Riemannsche Zetafunktion bezeichnet, ist eine meromorphe unktion, welche im Endlichen die einzige Singularität $s = 1$ hat. Die anze transzendente Funktion $(s-1)\zeta(s)$ verschwindet für $s = -2$, $-4, -6, \ldots$ und ihre übrigen Wurzeln liegen alle im Streifen

$$0 < \sigma < 1.$$

Ist $1 \leqq \alpha \leqq k-2$, so ist $L_\alpha(s)$ eine ganze transzendente Funktion on der folgenden Form:

$$L_\alpha(s) = \left(\frac{\pi}{k}\right)^{\frac{s+\delta_\alpha}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+\delta_\alpha}{2}\right)}\xi_\alpha(s),$$

o $\delta_\alpha = 0$ oder 1, je nachdem α gerade oder ungerade ist, $\Gamma(s)$ bezeichnet e Eulersche Gammafunktion und $\xi_\alpha(s)$ die folgenden Eigenschaften besitzt:

a) Sie ist eine ganze transzendente Funktion.

b) Ihre Wurzeln liegen im Streifen

$$0 < \sigma < 1.$$

c) Sie genügt der Funktionalgleichung

$$\xi_\alpha(s) = \varepsilon_\alpha \xi_{k-1-\alpha}(1-s) \qquad (1 \leqq \alpha \leqq k-2),$$

o ε_α eine nur von α und k abhängende Konstante bezeichnet mit dem soluten Betrage 1.

§ 2.

Umformung Dirichletscher Reihen.

Es sei $\varepsilon \neq 1$ eine k-te Einheitswurzel und

$$(1) \qquad g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \varepsilon^n}{n^s}$$

eine Dirichletsche Reihe, die für genügend große σ absolut konvergiert. Ich setze

$$(2) \qquad A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \qquad A_r(s) = \sum_{n \equiv r \pmod k} \frac{a_n}{n^s} \qquad (0 \leqq r \leqq k-1),$$

dann ist

$$g(s) = \sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon^r \sum_{n \equiv r \pmod k} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon^r A_r(s).$$

Ferner definiere ich folgende analytische Funktionen:

$$(3) \quad M_\alpha(s) = \sum_{r=0}^{k-1} \chi_\alpha(r) A_r(s) = \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{n \equiv r \pmod k} \frac{a_n \chi_\alpha(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \chi_\alpha(n)}{n^s}$$
$$(\alpha = 0, 1, \ldots, k-2).$$

Nun betrachte ich das lineare System

$$x_0 \chi_0(1) + x_1 \chi_1(1) + \ldots + x_{k-2} \chi_{k-2}(1) = \varepsilon$$
$$x_0 \chi_0(2) + x_1 \chi_1(2) + \ldots + x_{k-2} \chi_{k-2}(2) = \varepsilon^2$$
$$\ldots$$
$$x_0 \chi_0(k-1) + x_1 \chi_1(k-1) + \ldots + x_{k-2} \chi_{k-2}(k-1) = \varepsilon^{k-1}.$$

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} \chi_0(1) & \chi_1(1) & \ldots \chi_{k-2}(1) \\ \chi_0(2) & \chi_1(2) & \ldots \chi_{k-2}(2) \\ & \ldots & \\ \chi_0(k-1) & \chi_1(k-1) & \ldots \chi_{k-2}(k-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \varrho^{j_1} & \ldots \varrho^{(k-2)j_1} \\ 1 & \varrho^{j_2} & \ldots \varrho^{(k-2)j_2} \\ & & \ldots \\ 1 & \varrho^{j_{k-1}} & \ldots \varrho^{(k-2)j_{k-1}} \end{vmatrix}$$

ist von 0 verschieden, da $\varrho^{j_\alpha} \neq \varrho^{j_\beta}$ ist für $\alpha \neq \beta$ und $1 \leqq \alpha, \beta \leqq k-1$. Das System gestattet somit eine ganz bestimmte Lösung und die Zahlen $x_0, x_1, \ldots, x_{k-2}$ hängen nur von k und ε ab.

Durch Addieren der obigen Gleichungen ergibt sich

$$x_0(k-1) = \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{k-1} = -1,$$

d. h.

$$(4) \qquad x_0 = \frac{1}{1-k}.$$

Ich bemerke ferner, daß die Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{k-2}$ nicht sämtlich

rschwinden. Ist nämlich $j_r = \frac{k-1}{2}$ $(2 \leqq r \leqq k-1)$, so hat man nach r ersten und r-ten Gleichung

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_{k-2} = \varepsilon$$
$$x_0 - x_1 + \ldots - x_{k-2} = \varepsilon^r$$

d ε ist verschieden von ε^r.

Es folgt nun

$$\sum_{\alpha=0}^{k-2} x_\alpha M_\alpha(s) = \sum_{\alpha=0}^{k-2} \sum_{r=0}^{k-1} x_\alpha \chi_\alpha(r) A_r(s) = \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{\alpha=1}^{k-2} x_\alpha \chi_\alpha(r) A_r(s)$$
$$= \sum_{r=1}^{k-1} \varepsilon^r A_r(s) = g(s) - A_0(s),$$

h.

$$g(s) = A_0(s) + \sum_{\alpha=0}^{k-2} x_\alpha M_\alpha(s)$$
$$= A(s) + (x_0 - 1) M_0(s) + \sum_{\alpha=1}^{k-2} x_\alpha M_\alpha(s).$$

Diese Umformung von $g(s)$ gilt vorläufig nur für genug große σ; sie t aber nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung in der s-Ebene erall, wo die Funktionen $A(s)$, $M_0(s)$, $M_1(s)$, …, $M_{k-2}(s)$ sämtlich gulär sind.

§ 3.

Darstellung der Methode.

Es sei jetzt

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

ne Potenzreihe mit dem Konvergenzradius 1. Ihre Nichtfortsetzbarkeit er den Einheitskreis hinaus wird offenbar bewiesen, wenn ich die Existenz ner überall dichten Menge von singulären Stellen am Rande des Einitskreises nachweise. Für die Reihen, die hier behandelt werden, zeige insbesondere, daß die k-ten (von 1 verschiedenen) Einheitswurzeln guläre Stellen sind, wo k unendlich viele Primzahlen durchläuft.

Es gilt nämlich folgender Satz:

Es habe die Dirichletsche Reihe

$$\gamma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^s}$$

ne endliche Konvergenzabszisse; folglich ist

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n$$

regulär für $|z|<1$. *Ist* $\varphi(z)$ *regulär auch für* $z=1$, *so ist* $\gamma(s)$ *eine ganze transzendente Funktion*[7]).

Es sei also von nun an k eine feste ungerade Primzahl und ε eine ebenfalls feste, von 1 verschiedene k-te Einheitswurzel; ist $f(z)$ für $z=\varepsilon$ regulär, so ist

$$g(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\varepsilon^n}{n^s}$$

eine ganze transzendente Funktion, vorausgesetzt, daß $a_n=O(n^r)$ ist. In den Fällen, die hier behandelt werden, kostet die Berechnung der Funktionen (3) (d. h. ihre Zurückführung auf $L_\alpha(s)$ und $\zeta(s)$) keine besondere Mühe. Ich zeige nun mit Hilfe der Formel (5′), daß die Funktion $g(s)$ an gewissen Stellen der s-Ebene *Pole* besitzt; daraus folgt aber die Unmöglichkeit der Annahme, daß $f(z)$ für $z=\varepsilon$ regulär ist.

Die Hauptschwierigkeit bei diesem Beweise besteht darin, daß mehrere Glieder der Summe (5′) gleichzeitig singulär werden; die Aufgabe reduziert sich somit darauf, das Nichtverschwinden von den Residuen oder, allgemeiner, von gewissen Gliedern des singulären Teils der Laurentschen Entwicklung nachzuweisen.

Ich behalte durchwegs die Bezeichnungen (1), (2), (3).

§ 4.

$$\sum_{n=1}^{\infty}z^{p_n}.$$

p_n bezeichnet, wie gewöhnlich, die n-te Primzahl. Also ist

$$a_n=\begin{cases}1, & \text{wenn } n \text{ Primzahl ist,}\\ 0 & \text{in allen anderen Fällen.}\end{cases}$$

Man hat somit

$$M_\alpha(s)=\sum_p\frac{\chi_\alpha(p)}{p^s}\qquad(\alpha=0,1,\ldots,k-2),$$

wo die Summation über alle Primzahlen p zu erstrecken ist. Ferner

$$A_0(s)=\frac{1}{k^s}.$$

---

[7]) M. Fekete, Sur les séries de Dirichlet [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, **150** (1910), S. 1033–1036]; G. H. Hardy, The application to Dirichlet's series of Borel's exponential method of summation [Proceedings of the London Mathematical Society (2), **8** (1910), S. 277–294]. Übrigens ist der fragliche Satz auch der Arbeit von Hurwitz, Über die Anwendung eines funktionentheoretischen Prinzips auf bestimmte Integrale, Math. Annalen, **53**, S. 220–224 leicht zu entnehmen.

iese Funktionen sind regulär für $\sigma > 1$. Es sei nun s reell und > 1. ie Reihe

$$\sum_p \frac{\chi_\alpha(p)}{p} = \lim_{s=1+0} \sum_p \frac{\chi_\alpha(p)}{p^s}$$

bekanntlich konvergent für $1 \leqq \alpha \leqq k-2$ und eigentlich divergent für $= 0$[8]). Ferner ist $x_0 \neq 0$, also nach (5)

$$\lim_{s=1+0} g(s) = \infty,$$

omit, auf Grund der Ausführungen im § 3, die Behauptung bewiesen ist, . h. daß die Reihe in der Überschrift dieses Paragraphen den Einheits- reis zur natürlichen Grenze hat.

Ähnlich können die Reihen behandelt werden

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} z^{p_m p_n}, \quad \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} z^{p_m p_n p_r}, \text{ usw.}$$

§ 5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) z^n.$$

$\Lambda(n)$ bezeichnet hier das Mangoldtsche Symbol

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p \text{ für eine Primzahlpotenz } n = p^m, \\ 0 \text{ in allen anderen Fällen.} \end{cases}$$

an hat

$$M_\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_\alpha(n)\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{L_\alpha'(s)}{L_\alpha(s)} \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots k-2)^9)$$

nd

$$A_0(s) = \sum_{n \equiv 0 \pmod k} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Lambda(k^m)}{k^{ms}} = \log k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k^{ms}} = \frac{\log k}{k^s - 1},$$

so, nach (5),

$$g(s) = \frac{\log k}{k^s - 1} - \sum_{\alpha=0}^{k-2} x_\alpha \frac{L_\alpha'(s)}{L_\alpha(s)}.$$

Es sei nun $s = 1$; $L_\alpha(s)$ ist hier regulär und von 0 verschieden für $\leqq \alpha \leqq k-2$[10]). Die Funktion $L_0(s)$ hat hier aber einen Pol erster rdnung, ähnliches gilt also für ihre logarithmische Ableitung. Ferner t $x_0 \neq 0$; also ist $g(s)$ singulär für $s = 1$. Daraus folgt die Behauptung.

---

[8]) H., 1, S. 446.
[9]) H., 1, S. 420.
[10]) Man vgl. § 1.

§ 6.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) z^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) z^n.$$

Ich bezeichne mit $\sigma(n)$ die Summe der Teiler von n und mit $\tau(n)$ die Anzahl derselben. Ich setze allgemein

$$\sigma_a(n) = \sum_{d/n} d^a,$$

wo a eine beliebige (reelle oder komplexe) Zahl ist[11]). Man hat

$$\sigma_1(n) = \sigma(n), \quad \sigma_0(n) = \tau(n).$$

Ich beweise, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_a(n) z^n$$

für sämtliche a, welche nicht Wurzeln der Gleichung

$$\zeta(1-a) = 0$$

sind, über den Einheitskreis hinaus nicht fortsetzbar ist. Ist z. B. $a = 1$ oder 0, so ist diese Bedingung erfüllt.

Zunächst ist es klar, daß diese Potenzreihe den Konvergenzradius 1 hat. Es ist nämlich

$$|\sigma_a(n)| \leqq n \operatorname{Max}(1, |n^a|)$$

und für Primzahlen

$$\sigma_a(p) = 1 + p^a.$$

Ich behaupte nun, daß

$$M_a(s) = L_a(s-a) L_a(s) \qquad (a = 0, 1, \ldots, k-2).$$

ist. Wenn ich nämlich das Dirichletsche Produkt der beiden Reihen

$$L_a(s-a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_a(n)}{n^{s-a}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_a(n) n^a}{n^s}, \quad L_a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_a(n)}{n^s}$$

bilde, so ist

$$\sum_{d/n} d^a \chi_a(d) \chi_a\left(\frac{n}{d}\right) = \chi_a(n) \sum_{d/n} d^a = \chi_a(n) \sigma_a(n).$$

Ferner folgt ähnlicherweise

$$A(s) = \zeta(s-a) \zeta(s),$$

d. h. nach (5′)

$$g(s) = \zeta(s-a)\zeta(s) + (\varkappa_0 - 1) L_0(s-a) L_0(s) + \sum_{\alpha=1}^{k-2} \varkappa_\alpha L_\alpha(s-a) L_\alpha(s).$$

[11]) $\sum_{d/n}$ bedeutet, wie gewöhnlich, daß über alle Teiler d von n summiert wird.

Ist $1 \leqq \alpha \leqq k-2$, so ist $L_\alpha(s)$ in der ganzen s-Ebene regulär. In er Umgebung der Stelle $s=1$ gilt die Entwickelung

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \ldots,$$

erner hat man

$$L_0(s) = \left(1 - \frac{1}{k^s}\right)\zeta(s);$$

lso ist

$$\lim_{s=1}(s-1)g(s) = \zeta(1-a)\left[1 + (x_0 - 1)\left(1 - \frac{1}{k^{1-a}}\right)\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right]$$

$$= \frac{\zeta(1-a)}{k^{1-a}} \quad \text{für} \quad a \neq 0$$

vgl. (4)) und

$$\lim_{s=1}(s-1)^2 g(s) = 1 + (x_0 - 1)\left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 = \frac{1}{k} \quad \text{für} \quad a = 0.$$

Daraus folgt die Behauptung.

§ 7.

$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) z^n.$

$\varphi(n)$ bezeichnet hier das Eulersche Zeichen: die Anzahl der Zahlen $< n$, die zu n teilerfremd sind. Es ist offenbar $\varphi(n) < n$ und für Primzahlen $\varphi(p) = p - 1$. Die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) z^n$$

at somit den Konvergenzradius 1.

Man hat

$$M_\alpha(s) = \frac{L_\alpha(s-1)}{L_\alpha(s)} \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, k-2)$$

nd

$$A(s) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}\,^{12}).$$

Also ist nach (5′)

$$g(s) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + (x_0 - 1)\frac{L_0(s-1)}{L_0(s)} + \sum_{\alpha=1}^{k-2} x_\alpha \frac{L_\alpha(s-1)}{L_\alpha(s)}.$$

Es sei nun $s=2$. $M_\alpha(s)$ ist regulär für $1 \leqq \alpha \leqq k-2$; das Residuum ist somit

$$\lim_{s=2}(s-2)\,g(s) = \frac{1}{\zeta(2)}\left[1 + (x_0 - 1)\frac{1 - \frac{1}{k}}{1 - \frac{1}{k^2}}\right] = \frac{1}{\zeta(2)}\,\frac{1}{1-k^2} \neq 0,$$

. e. d.

---

12) Man vgl. H., 2, S. 680.

§ 8.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\nu(n)} z^n.$$

$\nu(n)$ bezeichnet hier die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren in $n\,[\nu(1)=0]$. Es ist offenbar $1 \leqq 2^{\nu(n)} \leqq \tau(n)$; ist nämlich

$$n = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_\nu^{\delta_\nu} \qquad [\nu = \nu(n)],$$

so sind die Zahlen

$$1;\ p_1, p_2, p_3, \dots;\ p_1 p_2,\ p_1 p_3, \dots;\ p_1 p_2 p_3, \dots,$$

deren Anzahl eben $2^{\nu(n)}$ ist, alle Teiler von n. Die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\nu(n)} z^n$$

hat somit den Konvergenzradius 1.

Man hat

$$M_\alpha(s) = [L_\alpha(s)]^2 \prod_p \left[1 - \frac{\chi_\alpha(p^2)}{p^{2s}}\right]^{13}).$$

Nun ist

$$\chi_\alpha(p^2) = [\chi_\alpha(p)]^2 = \chi_{2\alpha}(p),$$

d. h.

$$M_\alpha(s) = \frac{[L_\alpha(s)]^2}{L_{2\alpha}(2s)} \qquad (\alpha = 0, 1, \dots, k-2)$$

und ähnlicherweise

$$A(s) = \frac{[\zeta(s)]^2}{\zeta(2s)}.$$

Es sei nun $s=1$. $M_\alpha(s)$ ist regulär für $1 \leqq \alpha \leqq k-2$; $g(s)$ hat t den zweifachen Pol $s=1$, denn es ist nach den Formeln (5′) und (4) im § 2

$$\lim_{s=1} (s-1)^2 g(s) = \frac{1}{\zeta(2)} \left[1 + (x_0 - 1) \frac{\left(1 - \frac{1}{k}\right)^2}{1 - \frac{1}{k^2}}\right] = \frac{1}{\zeta(2)} \frac{1}{1+k} \neq 0,$$

q. e. d.

§ 9.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) z^n.$$

$\mu(n)$ bezeichnet das Möbiussche Symbol:

$\mu(1) = 1$,

$\mu(n) = 0$ für nicht quadratfreie n,

---

13) H., 2, S. 682.

$\mu(n) = (-1)^r$, wenn n quadratfrei ist und aus r verschiedenen Primfaktoren besteht.

Man hat

$$M_\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_\alpha(n)\,\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{L_\alpha(s)} \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, k-2)$$

und

$$A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}\ ^{14}).$$

Also ist

$$g(s) = \frac{1}{\zeta(s)} + \frac{x_0 - 1}{L_0(s)} + \sum_{\alpha=1}^{k-2} \frac{x_\alpha}{L_\alpha(s)}.$$

Ich betrachte diese Funktion an den Stellen $s = -1, -3, -5, \ldots$, der verschwinden nur die $L_\alpha(s)$ mit ungeradem α[15]; ich setze

$$R_q = \lim_{s=-(2q-1)} g(s)(s + 2q - 1) \qquad (q = 1, 2, 3, \ldots).$$

Man bedenke ferner, daß für ungerade α

$$L_\alpha(s) = \left(\frac{\pi}{k}\right)^{\frac{s+1}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}\, \xi_\alpha(s)$$

und

$$\lim_{s=-m} (s + m)\,\Gamma(s) = \frac{(-1)^m}{m!} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Man hat somit

$$\lim_{s=-(2q-1)} \frac{L_\alpha(s)}{s + 2q - 1} = A_q\, \xi_\alpha(-2q+1) = A_q\, \varepsilon_\alpha\, \xi_{k-1-\alpha}(2q)$$

$$= B_q\, \varepsilon_\alpha\, L_{k-1-\alpha}(2q) = B_q\, \varepsilon_\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}_\alpha(n)}{n^{2q}},$$

A_q und B_q von 0 verschieden sind und außer q nur von k abhängen. Man ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}_\alpha(n)}{n^{2q}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}_\alpha(n)\,\mu(n)}{n^{2q}} = 1,$$

also

$$\lim_{=-(2q-1)} \frac{s + 2q - 1}{L_\alpha(s)} = \frac{1}{B_q\, \varepsilon_\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}_\alpha(n)\,\mu(n)}{n^{2q}};$$

---

[14]) Man vgl. H., 2, S. 576.

[15]) Man vgl. § 1; $\frac{1}{\Gamma(s)}$ hat nämlich die Wurzeln $s = 0, -1, -2, \ldots$

daraus folgt, wenn ich

$$d_n = \frac{x_1}{\varepsilon_1}\bar{\chi}_1(n) + \frac{x_3}{\varepsilon_3}\bar{\chi}_3(n) + \ldots + \frac{x_{k-2}}{\varepsilon_{k-2}}\bar{\chi}_{k-2}(n)$$

setze, daß

$$R_q = \frac{1}{B_q}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n\mu(n)}{n^{2q}} \qquad (q = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist. Wäre nun $R_q = 0$ für alle q, so hätte die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n\mu(n)}{n^s}$$

Wurzeln mit beliebig großer Abszisse.

Es gilt aber der Satz:

Hat die Dirichletsche Reihe einen absoluten Konvergenzbereich und Wurzeln mit beliebig großer Abszisse, so verschwindet sie identisch[16]).

In diesem Falle ist

$$|d_n\mu(n)| \leqq |x_1| + |x_3| + \ldots + |x_{k-2}| = O(1),$$

also

$$d_n\mu(n) = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Es ist aber $d_n = d_{n'}$ für $n \equiv n' \pmod{k}$; ist ferner $1 \leqq r \leqq k-1$, so enthält die arithmetische Progression $r + kx$ immer eine Primzahl (sogar unendlich viele Primzahlen), für welche also

$$\mu(n) = \mu(r + kx) = -1 \neq 0$$

ist. Also ist $d_n = d_r = 0$ für $r = 1, 2, \ldots k-1$, d. h.

$$\frac{x_1}{\varepsilon_1}\bar{\chi}_1(n) + \frac{x_3}{\varepsilon_3}\bar{\chi}_3(n) + \ldots + \frac{x_{k-2}}{\varepsilon_{k-2}}\bar{\chi}_{k-2}(n) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Es ist also insbesondere

$$\frac{x_1}{\varepsilon_1}\bar{\varrho}^{\nu} + \frac{x_3}{\varepsilon_3}\bar{\varrho}^{3\nu} + \ldots + \frac{x_{k-2}}{\varepsilon_{k-2}}\bar{\varrho}^{(k-2)\nu} = 0 \qquad \left(0 \leqq \nu \leqq \frac{k-3}{2}\right).$$

Nun ist $|\varepsilon_\alpha| = 1$, und die Zahlen $x_1, x_3, \ldots, x_{k-2}$ können nicht sämtlich verschwinden (vgl. § 2); also ist die Determinante dieses Systems gleich 0. Dies trifft aber nicht zu, da $\bar{\varrho}^{\alpha} \neq \bar{\varrho}^{\beta}$ für $2 \leqq |\alpha - \beta| \leqq k-2$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

---

[16]) H., 2, S. 744, Satz ...

§ 10.

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\mu(n)]^2 z^n.$$

Man hat

$$L_\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_\alpha(n)[\mu(n)]^2}{n^s} = \prod_p \left[1 + \frac{\chi_\alpha(p)}{p^s}\right] = \prod_p \frac{1 - \frac{\chi_{2\alpha}(p)}{p^{2s}}}{1 - \frac{\chi_\alpha(p)}{p^s}} = \frac{L_\alpha(s)}{L_{2\alpha}(2s)}$$

$$(\alpha = 0, 1, \ldots, k-2)$$

l

$$A(s) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}.$$

Also ist

$$g(s) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} + (x_0 - 1)\frac{L_0(s)}{L_0(2s)} + \sum_{\alpha=1}^{k-2} x_\alpha \frac{L_\alpha(s)}{L_{2\alpha}(2s)}.$$

Es sei $s = 1$; das Residuum ist

$$\lim_{s=1}(s-1)g(s) = \frac{1}{\zeta(2)} + (x_0 - 1)\frac{1 - \frac{1}{k}}{1 - \frac{1}{k^2}}\frac{1}{\zeta(2)} = \frac{1}{\zeta(2)}\frac{1}{1-k^2} \neq 0,$$

e. d.

§ 11.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\nu(n)} \lambda(n) z^n.$$

Hier ist

$\lambda(1) = 1$,

$\lambda(n) = (-1)^r$, wenn die Anzahl der Primfaktoren in n (mehrfache t ihrer Multiplizität gezählt) r ist.

Man hat

$$M_\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_\alpha(n)\, 2^{\nu(n)} \lambda(n)}{n^s} = \prod_p \frac{\left[1 - \frac{\chi_\alpha(p)}{p^s}\right]^2}{1 - \frac{\chi_{2\alpha}(p)}{p^{2s}}} = \frac{L_{2\alpha}(2s)}{[L_\alpha(s)]^2}$$ [17])

$$(\alpha = 0, 1, \ldots, k-2)$$

l

$$A(s) = \frac{\zeta(2s)}{[\zeta(s)]^2}.$$

Also ist

$$g(s) = \frac{\zeta(2s)}{[\zeta(s)]^2} + (x_0 - 1)\frac{L_0(2s)}{[L_0(s)]^2} + \sum_{\alpha=1}^{k-2} x_\alpha \frac{L_{2\alpha}(2s)}{[L_\alpha(s)]^2}.$$

[17]) H., 2, S. 678.

Ich betrachte diese Funktion an den Stellen $s = -1, -3, -5, \ldots$. Ich setze wie in § 9

$$R_q = \lim_{s=-(2q-1)} g(s)(s+2q-1) \qquad (q = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dann ist, wie dort, für ungerade α

$$\lim_{s=-(2q-1)} \frac{s+2q-1}{L_\alpha(s)} = \frac{1}{B_q \varepsilon_\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}_\alpha(n)\mu(n)}{n^{2q}};$$

ferner ist ähnlicherweise

$$\lim_{s=-(2q-1)} \frac{L_{2\alpha}(2s)}{s+2q-1} = C_q \varepsilon_{2\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}_{2\alpha}(n)}{n^{4q-1}},$$

wo C_q von 0 verschieden ist und außer q nur von k abhängt.

Daraus folgt für ungerade α

$$\lim_{s=-(2q-1)} (s+2q-1)\frac{L_{2\alpha}(2s)}{[L_\alpha(s)]^2} = \frac{C_q}{B_q^2}\frac{\varepsilon_{2\alpha}}{\varepsilon_\alpha^2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{\chi}_\alpha(n)\mu(n)}{n^{2q}}\right\}^2 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{\chi}_{2\alpha}(n)}{n^{4q-1}}.$$

Ich definiere nun die folgenden zahlentheoretischen Funktionen:

$G(n) = 0$, wenn n keine Quadratzahl ist,

$G(n) = \nu$, wenn $n = \nu^2$ ist.

Ferner sei

$$\mu^*(n) = \sum_{d/n} \mu(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

und

$$F(n) = \sum_{d/n} \mu^*(d) G\left(\frac{n}{d}\right).$$

Dann ist offenbar

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{\chi}_\alpha(n)\mu(n)}{n^s}\right\}^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{\chi}_\alpha(n)\mu^*(n)}{n^s}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{\chi}_{2\alpha}(n)}{n^{2s-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{\chi}_\alpha(n^2)n}{n^{2s}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{\chi}_\alpha(n)G(n)}{n^s},$$

also

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{\chi}_\alpha(n)\mu(n)}{n^s}\right\}^2 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{\chi}_{2\alpha}(n)}{n^{2s-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{\chi}_\alpha(n)F(n)}{n^s}.$$

Ich setze

$$e_n = x_1 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1^2}\bar{\chi}_1(n) + x_3\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_3^2}\bar{\chi}_3(n) + \ldots + x_{k-2}\frac{\varepsilon_{2k-4}}{\varepsilon_{k-2}^2}\bar{\chi}_{k-2}(n),$$

dann ist

$$R_q = \frac{C_q}{B_q^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e_n F(n)}{n^{2q}} \qquad (q \geqq 1 \text{ und ganz}).$$

Wäre also $R_q = 0$ für $q = 1, 2, 3, \ldots$, so hätte die Dirichletsche
ihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n F(n)}{n^s}$$

ırzeln mit beliebig großer Abszisse. Nun ist

$$c_n = O(1);$$

ın hat ferner

$$|\mu^*(n)| \leqq \sum_{d/n} 1 \leqq n$$

d

$$|F(n)| \leqq \sum_{d/n} d\sqrt{\frac{n}{d}} \leqq n\sqrt{n}\sqrt{n} = n^2.$$

raus folgt nach § 9

$$c_n F(n) = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Man hat aber wie dort $c_n = c_{n'}$ für $n \equiv n' \pmod{k}$; ferner ist,
nn p eine Primzahl bezeichnet,

$$\mu^*(1) = 1, \qquad \mu^*(p) = 2\mu(p) = -2,$$

o

$$F(p) = G(p) - 2G(1) = -2 \neq 0.$$

h.

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_{k-1} = 0.$$

raus folgt ebenso wie in § 9 die Unmöglichkeit der Annahme, daß
s) eine ganze transzendente Funktion ist. Damit ist die Behauptung
wiesen.

(Eingegangen am 4. August 1919.)

Über konvergente und asymptotische Darstellung des Integrallogarithmus.

Von

Alfred Tauber in Wien.

§ 1.

Um eine konvergente, nicht bloß asymptotische Entwicklung des Integrallogarithmus bei *positivem* z

$$(1) \qquad Li(e^z) = C + \lg z + \int_0^z \frac{e^z - 1}{z}\, dz$$

oder eigentlich des Produktes $e^{-z} Li(e^z)$ und der Funktionen von ähnlichem Typus zu finden, gültig auch für die Stelle $z = \infty$ selbst und somit für große z brauchbar, kann man auf die Differentialgleichung dieser Funktionen

$$(2) \qquad z\Phi'(z) + (z + \alpha)\Phi(z) = 1 \qquad (\alpha \geqq 0)$$

auch die Methoden anwenden, welche in einer Arbeit über die Entwicklung von Integralen linearer Differentialgleichungen von mir auseinandergesetzt wurden[1]), jedoch für die hier zu erörternde Frage, deren Lösung hauptsächlich in den nachfolgenden Formeln (26) bis (30) liegt, eine Vereinfachung gestatten und deshalb durch eine *direkte* Betrachtung ersetzt werden sollen.

Es genüge die Funktion $\Psi(z)$ der in Verallgemeinerung von (2) gebildeten Differentialgleichung

$$(3) \qquad z\Psi'(z) + (z + \alpha)\Psi(z) = N(z),$$

wo $N(z)$ eine gegebene Funktion von z vorstellt. Dann erhält man durch $\varkappa$-malige Differentiation nach z

$$(4) \qquad z\Psi^{(\varkappa+1)}(z) + (z + \varkappa + \alpha)\Psi^{(\varkappa)}(z) + \varkappa\Psi^{(\varkappa-1)}(z) = N^{(\varkappa)}(z),$$

[1]) Sitzungsberichte der Wiener Akademie, 127 (1918), S. 1035.

hrend anderseits die Elimination von $\Psi'(z), \Psi''(z), \ldots, \Psi^{(\nu)}(z)$ aus) und den für $\varkappa = 1, 2, \ldots, \nu$ gebildeten Gleichungen (4) ein Resultat n der Form

$$\Psi^{(\nu+1)}(z) = (-1)^{\nu+1} \frac{\mathfrak{Q}_\nu(z)\,\Psi(z) - \mathfrak{P}_\nu(z)}{z^{\nu+1}}$$

fert. Daher folgen aus dem Vergleich der Darstellungen (4) und (5) $\Psi^{(\nu+1)}(z)$ die Rekursionen der $\mathfrak{P}_\nu(z)$, $\mathfrak{Q}_\nu(z)$

$$\mathfrak{P}_\nu = (z+\nu+\alpha)\,\mathfrak{P}_{\nu-1} - \nu z\,\mathfrak{P}_{\nu-2} + (-1)^\nu N^{(\nu)}(z),\quad \mathfrak{P}_0 = N(z),\quad \mathfrak{P}_{-1} = 0,$$
$$\mathfrak{Q}_\nu = (z+\nu+\alpha)\,\mathfrak{Q}_{\nu-1} - \nu z\,\mathfrak{Q}_{\nu-2},\qquad \mathfrak{Q}_0 = z+\alpha,\ \mathfrak{Q}_{-1} = 1,$$

daß $\mathfrak{Q}_\nu$ ein Polynom vom Grade $\nu+1$ in z wird, vgl. (13).

Wofern nun $\frac{\mathfrak{P}_\nu(z)}{\mathfrak{Q}_\nu(z)}$ für $\nu = \infty$ eine Grenzfunktion besitzt, was in der eise als erfüllt vorausgesetzt werden soll, daß

$$\frac{\mathfrak{P}_{\nu+1}}{\mathfrak{Q}_{\nu+1}} - \frac{\mathfrak{P}_\nu}{\mathfrak{Q}_\nu} = \frac{\delta_{\nu+1}}{\mathfrak{Q}_\nu \mathfrak{Q}_{\nu+1}},\quad \delta_{\nu+1} = \mathfrak{P}_{\nu+1}\mathfrak{Q}_\nu - \mathfrak{P}_\nu \mathfrak{Q}_{\nu+1},$$

eichwie sein Differentialquotient nach z das Element einer in der Nähe s betrachteten Wertes z gleichmäßig konvergenten Reihe ist, so wird ese Grenzfunktion jedenfalls dann der Differentialgleichung (3) genügen, nn das Substitutionsresultat von $\mathfrak{P}_\nu/\mathfrak{Q}_\nu$ in die Differentialgleichung, mlich

$$N - (z+\alpha)\frac{\mathfrak{P}_\nu}{\mathfrak{Q}_\nu} - z\frac{d}{dz}\frac{\mathfrak{P}_\nu}{\mathfrak{Q}_\nu} = \frac{\delta_{\nu+1}}{\mathfrak{Q}_\nu^2}$$

unendliches ν nach Null konvergiert. Daß wirklich die linke und hte Seite von (8) übereinstimmen, wird bewiesen, indem man (5) ch z differentiiert und die so erhaltenen Gleichungen

$$\mathfrak{P}_{\nu+1} = (\nu+1)\,\mathfrak{P}_\nu - z\,\mathfrak{P}_\nu' + N\,\mathfrak{Q}_\nu,$$
$$\mathfrak{Q}_{\nu+1} = (z+\alpha+\nu+1)\,\mathfrak{Q}_\nu - z\,\mathfrak{Q}_\nu',$$

erste mit $\mathfrak{Q}_\nu$, die zweite mit $-\mathfrak{P}_\nu$ multipliziert, addiert. Bezüglich des fferentialquotienten von (7) ist noch anzuführen, daß aus (8) durch fferenzbildung folgt

$$-(z+\alpha)\left(\frac{\mathfrak{P}_{\nu+1}}{\mathfrak{Q}_{\nu+1}} - \frac{\mathfrak{P}_\nu}{\mathfrak{Q}_\nu}\right) - z\frac{d}{dz}\left(\frac{\mathfrak{P}_{\nu+1}}{\mathfrak{Q}_{\nu+1}} - \frac{\mathfrak{P}_\nu}{\mathfrak{Q}_\nu}\right) = \frac{\delta_{\nu+2}}{\mathfrak{Q}_{\nu+1}^2} - \frac{\delta_{\nu+1}}{\mathfrak{Q}_\nu^2}.$$

Im Falle $N = 1$, das heißt der Differentialgleichung (2), ist zunächst $\alpha > 0$ zu bemerken, daß ihr das Produkt von $e^{-z}z^{-\alpha}$ mit der Funktion

$$\int_0^z e^z z^{\alpha-1}\,dz = \Gamma(\alpha)$$

genügt, die, wie aus der Schreibweise

$$\int_0^z (e^z - 1) z^{\alpha-1} dz + \frac{z^\alpha - 1}{\alpha} + \left[\frac{1}{\alpha} - \Gamma(\alpha)\right]$$

ersichtlich, beim Grenzübergang $\lim \alpha = 0$ in den Integrallogarithmus übergeht, weil alsdann der letzte Term gleich C, der Eulerschen Konstanten wird. Dann spezialisiert sich (6) zu

$$(12) \quad \begin{aligned} \mathfrak{P}_\nu &= (z+\nu+\alpha)\mathfrak{P}_{\nu-1} - \nu z \mathfrak{P}_{\nu-2}, \quad \mathfrak{P}_0 = 1, \qquad \mathfrak{P}_{-1} = 0, \\ \mathfrak{Q}_\nu &= (z+\nu+\alpha)\mathfrak{Q}_{\nu-1} - \nu z \mathfrak{Q}_{\nu-2}, \quad \mathfrak{Q}_0 = z+\alpha, \ \mathfrak{Q}_{-1} = 1, \end{aligned}$$

und für die Nenner gilt die einfache independente Formel

$$(13) \quad \mathfrak{Q}_\nu = \sum_{\varkappa=0}^{\nu-1} \binom{\nu+1}{\varkappa} \frac{/\varkappa}{\alpha} z^{\nu+1-\varkappa}, \quad \frac{/\varkappa}{\alpha} = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\varkappa-1), \quad \frac{/0}{\alpha} = 1,$$

während die $\mathfrak{P}$ rekurrierend zu bestimmen sind:

$$(14) \quad \mathfrak{P}_1 = z+\alpha+1, \ \mathfrak{P}_2 = z^2 + (2\alpha+1)z + (\alpha+1)(\alpha+2), \ldots$$

Aus (12) folgt sofort für die Determinanten $\delta_\nu = \mathfrak{P}_{\nu+1}\mathfrak{Q}_\nu - \mathfrak{P}_\nu \mathfrak{Q}_{\nu+1}$ die Rekursion $\delta_\nu = \nu z \delta_{\nu-1}$, demnach $\delta_0 = 1, \delta_1 = z, \ldots, \delta_\nu = \nu! z^\nu$ und dadurch der Nachweis, daß für große ν

$$\frac{\delta_{\nu+1}}{\mathfrak{Q}_\nu^2} = \frac{(\nu+1)z^{\nu+1}}{\mathfrak{Q}_\nu} \frac{\nu!}{\mathfrak{Q}_\nu} < \frac{(\nu+1)z^{\nu+1}}{\binom{\nu+1}{2}\alpha(\alpha+1)z^{\nu-1}} \frac{\nu!}{\frac{/\nu+1}{\alpha}} < \frac{2z^2}{\nu\alpha} \frac{1}{\nu^\alpha}$$

beliebig klein wird. Ferner repräsentiert, wie gefordert, die Größe

$$\frac{\mathfrak{P}_{\nu+1}}{\mathfrak{Q}_{\nu+1}} - \frac{\mathfrak{P}_\nu}{\mathfrak{Q}_\nu} = \frac{(\nu+1)z^{\nu+1}}{\mathfrak{Q}_\nu} \frac{\nu!}{\mathfrak{Q}_{\nu+1}} < \frac{2z^2}{\nu\alpha} \frac{\nu!}{\frac{/\nu+2}{\alpha}} < \frac{2z^2}{\alpha} \frac{\Gamma(\alpha)}{\nu^{\alpha+2}}$$

das Element einer bei z gleichmäßig konvergenten Reihe, ebenso ihr Differentialquotient. Und weil auch der Wert, welchen das dargestellte Integral für $z = 0$ annimmt, mit dem Grenzwert von $\mathfrak{P}_\nu(0)/\mathfrak{Q}_\nu(0)$ übereinstimmen muß, welch letzterer wegen $\mathfrak{P}_\nu(0)/\mathfrak{Q}_\nu(0) = \frac{1}{\alpha}$ selbst gleich α^{-1} ist, so stellt[2]) $\lim \mathfrak{P}_\nu / \mathfrak{Q}_\nu$, das heißt die Kettenbruchentwicklung (12) jenes Integral von (2) dar, welches sich für $z = 0$ auf α^{-1} reduziert, nämlich

$$(15) \quad \int_0^1 e^{-zu}(1-u)^{\alpha-1} du = \frac{1}{z+\alpha} - \frac{z}{z+\alpha+1} - \frac{2z}{z+\alpha+2} -$$

[2]) Vgl. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig und Berlin, 1913, wo auf S. 475, 480, 498 die obige Gleichung (15) in möglichster Allgemeinheit bewiesen wird.

Dagegen vermag die Darstellung eines Integrals von (2) im Grenzfall $= 0$, also für $\Phi(z) = e^{-z} Li(e^z)$ nicht mehr die Stelle $z = 0$ mitzu-ıfassen, sondern bloß alle positiven $z > c$ für irgendein $c > 0$ unter ıhilfenahme des Einen Wertes $\Phi(c)$, als welcher am einfachsten $\Phi(1)$ ählbar ist. Setzt man dann, bei $z \sim 0$,

6) $$\Omega(z) = \frac{\Phi(z+1) - \Phi(1)\, e^{-z}}{z} = \frac{e^{-z}}{z} \int_0^z \frac{e^z\, dz}{z+1},$$

genügt $\Omega(z)$ der Differentialgleichung

7) $$z\,\Omega'(z) + (z+1)\,\Omega(z) = \frac{1}{z+1}$$

d kann selbst wieder durch die bekannte Zerlegung

8) $$\int_1^z \frac{e^z\, dz}{z} = e^z \sum_{\varkappa=0}^{\mu-1} \frac{\varkappa!}{z^{\varkappa+1}} - e \sum_{\varkappa=0}^{\mu-1} \varkappa! + \mu! \int_1^z \frac{e^z\, dz}{z^{\mu+1}}$$

f eine andere Funktion $\Omega_\mu(z)$ gemäß

9) $$\Omega(z) = \frac{1}{z}\left[\sum_{\varkappa=0}^{\mu-1} \frac{\varkappa!}{(z+1)^{\varkappa+1}} - e^{-z} \sum_{\varkappa=0}^{\mu-1} \varkappa!\right] + \mu!\, \Omega_\mu(z),$$

$$\Omega_\mu(z) = \frac{e^{-z}}{z} \int_0^z \frac{e^z\, dz}{(z+1)^{\mu+1}}, \quad \Omega_0(z) = \Omega(z)$$

rückgeführt werden, wobei $\Omega_\mu(z)$ der Differentialgleichung

0) $$z\,\Omega'_\mu(z) + (z+1)\,\Omega_\mu(z) = N, \quad N = \frac{1}{(z+1)^{\mu+1}}$$

nügt. Deren Behandlung, sowohl bei $\mu = 0$ als bei $\mu > 0$ nach den ıigen Formeln (3) ff. bei $\alpha = 1$ führt zu den Beziehungen

1) $$\mathfrak{P}_\nu = (-1)^\nu N^{(\nu)} z^\nu + (z+\nu+1)\,\mathfrak{P}_{\nu-1} - \nu z\,\mathfrak{P}_{\nu-2},$$
$$\mathfrak{Q}_\nu = (z+\nu+1)\,\mathfrak{Q}_{\nu-1} - \nu z\,\mathfrak{Q}_{\nu-2}.$$

Nunmehr ist aber entsprechend (13) $\mathfrak{Q}_\nu$ einfach darstellbar:

2) $$\mathfrak{Q}_\nu = \sum_{\varkappa=0}^{\nu+1} \binom{\nu+1}{\varkappa} \varkappa!\, z^{\nu+1-\varkappa} = (\nu+1)!\, e_{\nu+1}(z),$$
$$e_\nu(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^\nu}{\nu!}.$$

Hieraus folgt für die Determinanten $\delta_\nu = \mathfrak{P}_\nu \mathfrak{Q}_{\nu-1} - \mathfrak{P}_{\nu-1} \mathfrak{Q}_\nu$:

3) $$\delta_\nu = \nu z\, \delta_{\nu-1} + (-1)^\nu z^\nu N^{(\nu)} \mathfrak{Q}_{\nu-1}$$
$$= \nu!\, z^\nu \sum_{\varkappa=0}^{\nu} (-1)^\varkappa N^{(\varkappa)} e_\varkappa(z), \quad \delta_0 = N.$$

Der obigen Differentialgleichung (20) entsprechend, wird für $N=(z+1)^{-\mu-1}$ die Rekursion (21) der $\mathfrak{P}$

$$(24)\qquad \mathfrak{P}_\nu=(z+\nu+1)\mathfrak{P}_{\nu-1}-\nu z\mathfrak{P}_{\nu-2}+z^\nu\frac{\overline{\mu+1}^{\nu}}{(z+1)^{\mu+\nu+1}}$$

und $\mathfrak{P}_\nu$ ein Bruch[3]) mit dem Nenner $(z+1)^{\mu+\nu+}$

$$(25)\qquad \mathfrak{P}_\nu=\frac{\mathfrak{R}_\nu}{(z+1)^{\mu+\nu+1}},\quad \mathfrak{R}_\nu=(z+1)(z+\nu+1)\mathfrak{R}_{\nu-1}-\nu z(z+1)^2\mathfrak{R}_{\nu-2}+\overline{\mu+1}^{\nu}z$$
$$\mathfrak{R}_0=1,\quad \mathfrak{R}_1=z^2+(\mu+4)z+2,\ldots$$

Für die Determinanten δ_ν folgt aus (23)

$$\delta_\nu=\frac{\nu!\,z^\nu}{(z+1)^{\mu+\nu+1}}\sum_{\varkappa=0}^{\nu}\overline{\mu+1}^{\varkappa}\,e_\varkappa(z)(z+1)^{\nu-\varkappa},$$

und weil die Größen $\overline{\mu+1}^{\varkappa}(z+1)^{\nu-\varkappa}$ mit wachsendem $\varkappa$ bei $\mu<z$ erst ab-, dann zunehmen, so liegt ihr Maximum an den Extremen für $\varkappa=0$ und $\varkappa=\nu$, nämlich $(z+1)^\nu$ und $\overline{\mu+1}^{\nu}$, welch letzteres schließlich überwiegt. Somit ist bei genügend großem ν

$$\delta_\nu<\frac{\nu!\,z^\nu}{(z+1)^{\mu+\nu+1}}(\nu+1)\overline{\mu+1}^{\nu}\,e_\nu(z)=\frac{(\nu+1)!\,z^\nu\overline{\mu+1}^{\nu}\,e_\nu(z)}{(z+1)^{\mu+\nu+1}},$$

wodurch der Konvergenzbedingung bezüglich des Ausdrucks

$$\frac{\delta_\nu}{\mathfrak{Q}_{\nu-1}^2}<\frac{(\nu+1)!\,z^\nu e_\nu(z)\overline{\mu+1}^{\nu}}{[\nu!\,e_\nu(z)]^2(z+1)^{\mu+\nu+1}}=\frac{\nu+1}{e_\nu(z)}\binom{\mu+\nu}{\mu}\frac{z^\nu}{(z+1)^{\mu+\nu+1}},$$

der wegen des Faktors $\left(\frac{z}{z+1}\right)^\nu$ kleiner als jede Potenz von ν^{-1} wird, entsprochen erscheint. Ebenso verhält es sich mit der Größe (10) rechts. Nachdem ferner $\mathfrak{P}_\nu(0)/\mathfrak{Q}_\nu(0)$ für jedes ν gleich 1 ist, *so stellt* $\lim \mathfrak{P}_\nu/\mathfrak{Q}_\nu$ *gemäß* (22), (24) *gebildet für* $z>0$ *die Funktion* $\Omega_\mu(z)$, oder, nach (16), (19) die Gleichung

$$(26)\quad e^{-(z+1)}[Li(e^{z+1})-Li(e)]=\sum_{\varkappa=0}^{\mu-1}\frac{\varkappa!}{(z+1)^{\varkappa+1}}-e^{-z}\sum_{\varkappa=0}^{\mu-1}\varkappa!+\mu!\,z\lim\frac{\mathfrak{P}_\nu}{\mathfrak{Q}_\nu}$$

das gesuchte Integral von (2) dar. Die Brüche $\mathfrak{P}_\nu/\mathfrak{Q}_\nu$ nähern sich durchaus *wachsend* ihrem Grenzwert

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\delta_\nu}{\mathfrak{Q}_\nu\mathfrak{Q}_{\nu-1}}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^\nu}{(\nu+1)!\,e_\nu(z)\,e_{\nu+1}(z)}\sum_{\varkappa=0}^{\nu}\frac{e_\varkappa(z)\overline{\mu+1}^{\varkappa}}{(z+1)^{\mu+\varkappa+1}},$$

[3]) Die rekurrierende Berechnung der $\mathfrak{P}$ bei *numerisch* gegebenem z läßt sich auch ohne Benutzung der $\mathfrak{R}$ mittels (24) durchführen. Bei großem z kann entweder $z=\frac{1}{x}$ gesetzt, oder $\mathfrak{P}_\nu$ und $\mathfrak{Q}_\nu$ durch eine passende Potenz k_ν von 10 dividiert werden.

d die *Umordnung* der rechten Seite, nach Auswertung von

$$\sum_{\nu=\varkappa}^{\infty} \frac{z^\nu}{(\nu+1)!\, e_\nu(z)\, e_{\nu+1}(z)} = \sum_{\nu=\varkappa}^{\infty} \frac{1}{z}\left[\frac{1}{e_\nu(z)} - \frac{1}{e_{\nu+1}(z)}\right] = \frac{1}{z}\left[\frac{1}{e_\varkappa(z)} - e^{-z}\right],$$

ibt eine neue Form für $\Omega_\mu(z)$

7) $$z\,\Omega_\mu(z) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \binom{\varkappa}{\mu+1} \frac{1 - e_\varkappa(z)\, e^{-z}}{(z+1)^{\mu+\varkappa+1}}.$$

eziell für $\mu = 0$ entsteht dann die Entwicklung

8) $$e^{-(z+1)}\left[Li(e^{z+1}) - Li(e)\right] = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \varkappa! \frac{1 - e_\varkappa(z)\, e^{-z}}{(z+1)^{\varkappa+1}},$$

der man auch direkt gelangen kann, gleichwie zu der einfachen Um-
mung

8a) $$\int_0^z \frac{e^z - 1}{z}\, dz = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \varkappa! \frac{e^z - e_{\varkappa+1}(z)}{z^{\varkappa+1}}.$$

Wählt man in (26) die Zahl $\mu > 0$, so besagt dies, vgl. (18), daß
Beginn der eigentlichen Kettenbruchentwicklung zuerst μ Terme der
mptotischen Entwicklung von $[Li(e^{z+1}) - Li(e)]\, e^{-(z+1)}$ benützt werden.
rvorgehoben sei der Fall $\mu = 1$

9) $$\begin{cases} e^{-(z+1)}\left[Li(e^{z+1}) - Li(e) + e\right] = \dfrac{1}{z+1} + \lim \dfrac{z\,\Re_\nu}{(z+1)^{\nu+2}\,\mathfrak{D}_\nu} \\ \Re_\nu = (z+1)(z+\nu+1)\Re_{\nu-1} - \nu z (z+1)^2 \Re_{\nu-2} + (\nu+1)!\, z^\nu \\ \Re_0 = 1,\ \Re_1 = z^2 + 5z + 2, \ldots \end{cases}$$

rigens erscheint eine halbwegs brauchbare Konvergenz nur vorhanden,
nn μ im Verhältnis zu z vergleichsweise klein gewählt ist.

Statt der asymptotischen Entwicklung von $\Phi(z)$ kann man auch
jenige von $\Omega(z)$ um $z = \infty$

1) $$\Omega(z) = \sum_{\varkappa=0}^{\mu-1} \frac{\mathfrak{B}_\varkappa}{(z+1)^{\varkappa+2}} + R_{\mu+1}(z), \quad \mathfrak{B}_\varkappa = \sum_{s=0}^{\varkappa} s!$$

wenden, so daß zwischen $R_{\mu+1}(z)$ und der früheren Funktion $\Omega_\mu(z)$
Zusammenhang

2) $$\begin{aligned} R_{\mu+1}(z) &= \mathfrak{B}_\mu \Omega_\mu(z) - (\mu+1)\mathfrak{B}_{\mu-1}\Omega_{\mu+1}(z) \\ &= \mu!\, \Omega_\mu(z) + \frac{\mathfrak{B}_{\mu-1}}{z}\left[\frac{1}{(z+1)^{\mu+1}} - e^{-z}\right] \end{aligned}$$

teht, woraus man die Differentialgleichung für $R_{\mu+1}(z)$

$$z R'_{\mu+1}(z) + (z+1) R_{\mu+1}(z) = \frac{\mathfrak{B}_\mu}{(z+1)^{\mu+1}} - \frac{(\mu+1)\mathfrak{B}_{\mu-1}}{(z+1)^{\mu+2}}$$

ableitet. Auch hier konvergiert die Entwicklung $R_{\mu+1}(z) = \lim \mathfrak{P}_\nu / \mathfrak{Q}_\nu$ mit

$$(33)\quad \mathfrak{P}_\nu = (z+\nu+1)\mathfrak{P}_{\nu-1} - \nu z \mathfrak{P}_{\nu-2} + z^\nu \frac{d^\nu}{dz^\nu}\left[\frac{\mathfrak{B}_\mu}{(z+1)^{\mu+1}} - \frac{(\mu+1)\mathfrak{B}_{\mu-1}}{(z+1)^{\mu+2}}\right]$$

und den durch (22) definierten $\mathfrak{Q}_\nu$, nur scheint sie bloßes konvergenz- theoretisches Interesse zu bieten, weil, wie aus der Gestalt der δ_ν, vgl. (23),

$$\mathfrak{P}_\nu \mathfrak{Q}_{\nu-1} - \mathfrak{P}_{\nu-1}\mathfrak{Q}_\nu = \nu!\, z^\nu \sum_{\varkappa=0}^{\nu} e_\varkappa(z)\left[\frac{\binom{\mu+\varkappa}{\varkappa}\mathfrak{B}_\mu}{(z+1)^{\mu+\varkappa+1}} - \frac{\binom{\mu+\varkappa+1}{\varkappa}\mathfrak{B}_{\mu-1}}{(z+1)^{\mu+\varkappa+2}}\right]$$

hervorgeht, die Näherungswerte $\mathfrak{P}_\nu/\mathfrak{Q}_\nu$ mit wachsendem ν erst wachsen und dann abnehmen, dies aber den Umweg eines erheblichen Hinaus- wachsens über den wahren Wert mit sich bringen kann.

§ 2.

Gegenüber den bisher gegebenen für alle $z > 0$, inklusive $z = \infty$ *kon- vergenten* Darstellungen der $\Omega_\mu(z)$ entsteht die Frage der für ein ge- gebenes z erreichbaren Genauigkeit bei einer möglichst weit getriebenen *asymptotischen* Darstellung, derart, daß eine weitere Fortsetzung der letztern den bereits erzielten Näherungswert verschlechtern oder nur un- wesentlich verbessern würde, was im wesentlichen mit der Frage nach der *größten* Zahl ν zusammenfällt, für welche noch die beiden, untereinander nach (18) gleichbedeutenden Ungleichungen

$$(34)\quad \int_1^z \frac{e^z dz}{z} > e^z \sum_{\varkappa=0}^{\nu-1} \frac{\varkappa!}{z^{\varkappa+1}}, \qquad \int_1^z \frac{e^z dz}{z^{\nu+1}} > \frac{\mathfrak{B}_{\nu-1}\, e}{\nu!}$$

erfüllt sind, Bedingungen, welche nahezu mit der Forderung $R_{\nu+1}(z-1) > 0$ übereinstimmen, d. h. nach (32) mit

$$(35)\quad \int_0^{z-1} \frac{e^z dz}{(z+1)^{\nu+1}} > \frac{\mathfrak{B}_{\nu-1}}{\nu!}\left[1 - \frac{e^{z-1}}{z^{\nu+1}}\right],$$

vorausgesetzt, daß rechts der Subtrahend gegenüber dem Minuenden als vergleichsweise klein angesehen werden darf.

Diese Aufgabe der Bestimmung der größtmöglichen Zahl ν in (34) kann angenähert durch eine Umformung gelöst werden, indem man unterm Integral e^z nach Potenzen von z entwickelt

$$(36)\quad \int_1^z \frac{e^z dz}{z^{\nu+1}} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \int_1^z \frac{z^{\varkappa-\nu-1} dz}{\varkappa!} = \sum_{\varkappa=0}^{\nu-1} \frac{1}{\varkappa!\,(\nu-\varkappa)}\left(1 - \frac{1}{z^{\nu-\varkappa}}\right) + \frac{\lg z}{\nu!} + \sum_{\varkappa=\nu+1}^{\infty} \frac{z^{\varkappa-\nu}-1}{\varkappa!\,(\varkappa-\nu)}$$

enn dann noch nachgewiesen wird, daß rechts für die von z unabhängigen
ößen die Gleichung

$$\sum_{\varkappa=0}^{\nu-1}\frac{1}{\varkappa!\,(\nu-\varkappa)}-\sum_{\varkappa=\nu+1}^{\infty}\frac{1}{\varkappa!\,(\varkappa-\nu)}=\frac{1}{\nu!}\left[\mathfrak{B}_{\nu-1}\,e-\sum_{\varkappa=1}^{\nu}\frac{1}{\varkappa}-\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\frac{1}{\varkappa!\,\varkappa}\right]$$

t, so erhält man hieraus sofort die Darstellung

$$\left\{\begin{aligned}\nu!\int_1^z\frac{e^z\,dz}{z^{\nu+1}}-\mathfrak{B}_{\nu-1}e&=\sum_{s=1}^{\nu}\frac{1}{s}\left[\frac{z^s}{\binom{s}{\nu+1}}-\frac{\nu!\,z^{-s}}{(\nu-s)!}\right]+\sum_{s=\nu+1}^{\infty}\frac{1}{s}\frac{z^s}{\binom{s}{\nu+1}}-\mathfrak{F},\\ \mathfrak{F}&=\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\nu}\right)-\lg z-C+Li(e).\end{aligned}\right.$$

m Beweise von (37) werde von der Umformung

$$\sum_{\varkappa=0}^{\nu-1}\frac{1}{\varkappa!\,(\nu-\varkappa)}=\frac{1}{\nu!}\sum_{\varkappa=0}^{\nu-1}\varkappa!\,e_\varkappa(1)$$

brauch gemacht, weiter ergibt sich, wenn $e-e_\varkappa(1)=\varrho_{\varkappa+1}$ gesetzt wird,
Differenz

$$e\sum_{\varkappa=0}^{\nu-1}\frac{\varkappa!}{\nu!}-\sum_{\varkappa=0}^{\nu-1}\frac{1}{\varkappa!\,(\nu-\varkappa)}=\frac{1}{\nu!}\sum_{\varkappa=0}^{\nu-1}\varkappa!\,\varrho_{\varkappa+1}=\frac{1}{\nu!}\sum_{\varkappa=0}^{\nu-1}\left(\frac{1}{\varkappa+1}+\varkappa!\,\varrho_{\varkappa+2}\right),$$

nit erscheint (37) unter Berücksichtigung von

$$\sum_{\varkappa=0}^{\nu-1}\varkappa!\,\varrho_{\varkappa+2}=\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{1}{\varkappa!}-\frac{1}{\binom{\varkappa}{\nu+1}}\right)$$

rifiziert. Es handelt sich nun darum, ν so zu wählen, daß die *rechte*
ite von (38) *positiv* bleibt. Hierzu genügt es, daß die erste dort
hende Summe, $z=\nu\xi$ gesetzt,

$$\sum_{s=1}^{\nu}h_s=\sum_{s=1}^{\nu}\frac{1}{s}\left[\frac{\xi^s}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\left(1+\frac{2}{\nu}\right)\ldots\left(1+\frac{s}{\nu}\right)}-\frac{\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)\ldots\left(1-\frac{s-1}{\nu}\right)}{\xi^s}\right]$$

ößer als $\mathfrak{F}$ sei. Die Summanden h_s sind aber größer als die Terme

$$\bar{h}_s=\frac{1}{s\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\left(1+\frac{2}{\nu}\right)\ldots\left(1+\frac{s}{\nu}\right)}\left[\xi^s-\frac{1+\frac{s}{\nu}}{\xi^s}\right],$$

welche sich das ständige Abnehmen $\bar{h}_s>\bar{h}_{s+1}$ bewirken läßt, wenn
Bedingung

$$\xi^{2s+1}\left[s+1+\frac{(s+1)^2}{\nu}-s\xi\right]>\left[1+\frac{s+1}{\nu}\right]\left[(s+1)\left(1+\frac{s}{\nu}\right)\xi-s\right],$$

oder bei $\xi = 1+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ und $\nu = \frac{\beta}{\varepsilon^2}$ der Bedingung

$$(1+\varepsilon)^{2s+1}\left[1 - s\varepsilon + \frac{(s+1)^2\varepsilon^2}{\beta}\right] > \left[1 + \frac{s+1}{\beta}\varepsilon^2\right]\left[1 + (s+1)\varepsilon + \frac{s^2+s}{\beta}(\varepsilon^2+\varepsilon^3)\right]$$

genügt wird. Dies geschieht, wie die Entwicklung nach Potenzen von ε und der Vergleich der Koeffizienten gleichhoher Potenzen von ε zeigt, zumindest, wenn β zwischen 1 und 3 gewählt wird. Da nun die $\bar{h}_s$ abnehmen, läßt sich die Bedingung $\sum_{s=1}^{\nu} \bar{h}_s > \mathfrak{F}$ durch die stärkere $\tau \bar{h}_\tau > \mathfrak{F}$ für ein noch anzugebendes $\tau < \nu$ ersetzen

$$\tau \bar{h}_\tau = \frac{\xi^\tau - \left(1+\frac{\tau}{\nu}\right)\xi^{-\tau}}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\left(1+\frac{2}{\nu}\right)\dots\left(1+\frac{\tau}{\nu}\right)} > \mathfrak{F},$$

und diese wieder — wegen $\left(1+\frac{s}{\nu}\right)^{-1} > e^{-\frac{s}{\nu}}$ und weil bei $z > \nu+1$ die Größe $\mathfrak{F} < Li(e) < 2$ ist — durch die Forderung

$$e^{-\frac{\tau(\tau+1)}{2\nu}}\left[\xi^\tau - \left(1+\frac{\tau}{\nu}\right)\xi^{-\tau}\right] > 2,$$

wodurch man endlich, bei $\tau^2 = 2\nu$, zu einem Ansatz von der Form

$$\xi \geqq 1+\sqrt{\frac{2}{\nu}}, \quad z \geqq \nu + \sqrt{2\nu}, \quad \nu \leqq z - \sqrt{2z} \tag{43}$$

gelangt. Anderseits, während diese Bedingungen dafür hinreichen, daß die Ungleichung (34) erfüllt wird, ist letzteres nicht mehr der Fall, wenn die Summation $\sum_{\varkappa=0}^{\nu-1} \frac{\varkappa!}{z^{\varkappa+1}}$ soweit geht als ihre Terme *abnehmen*, d. h. bei $z \leqq \nu < z+1$, denn bei $z = \nu$ resultiert für die Größen

$$h_s = \frac{1}{s}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\left(1+\frac{2}{\nu}\right)\dots\left(1+\frac{s}{\nu}\right)} - \left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)\dots\left(1-\frac{s-1}{\nu}\right)\right] = \frac{\alpha_s - \beta_s}{s},$$

deren Differenzen $h_{s+1} - h_s$ erst positiv, dann negativ sind, und zwar ersteres bei

$$\frac{\beta_s}{\alpha_s} > \frac{1+\frac{(s+1)^2}{\nu}}{\left(1+\frac{s^2}{\nu}\right)\left(1+\frac{s+1}{\nu}\right)},$$

so daß also das Maximum $h_{\sigma+1}$ unter den Größen h

$$h_{\sigma+1} = \frac{1}{\sigma+1}\left[\frac{\alpha_\sigma}{1+\frac{\sigma+1}{\nu}} - \beta_\sigma\left(1-\frac{\sigma}{\nu}\right)\right]$$

$$< \frac{\alpha_\sigma}{\sigma+1}\left[\frac{1}{1+\frac{\sigma+1}{\nu}} - \frac{\left(1-\frac{\sigma}{\nu}\right)\left(1+\frac{(\sigma+1)^2}{\nu}\right)}{\left(1+\frac{\sigma+1}{\nu}\right)\left(1+\frac{\sigma^2}{\nu}\right)}\right] < \frac{\alpha_\sigma}{\nu}$$

rd, die Summe $\sum_{s=1}^{\nu} h_s$ kleiner als α_σ und demnach entschieden kleiner
$\mathfrak{F}$. Daher ist der *Fehler*, wenn $\lambda = E(z - \sqrt{2z})$ Glieder der asym-
ptischen Entwicklung für den Integrallogarithmus benützt werden,

$$4) \qquad e^{-z}\int_1^z \frac{e^z dz}{z} - \sum_{\varkappa=0}^{\lambda-1} \frac{\varkappa!}{z^{\varkappa+1}} < \frac{\lambda!}{z^{\lambda+1}}\sqrt{2z},$$

s heißt kleiner als der $\sqrt{2z}$-fach genommene nächstfolgende Term der
twicklung.

Wien, 2. Oktober 1919.

(Eingegangen am 8. Oktober 1919.)

Nachtrag während der Drucklegung (27. 4. 1920).

Entwicklungen von der Art, wie in der obigen Formel (28) für den
tegrallogarithmus, entstehen, wenn man für das Integral einer linearen
fferentialgleichung $\sum_{\lambda=0}^{m} \varphi_\lambda(x) \frac{d^\lambda y}{dx^\lambda} = \Phi(x)$ einen Ansatz von der Form
$\int_0^{\infty} \psi_\varkappa(\zeta) x^\varkappa$ mit $\zeta = \frac{1}{x^n} - c$ macht, wo c einen Parameter und n eine
sitive ganze Zahl vorstellt. Die Funktionen $\psi_\varkappa(\zeta)$ werden determiniert,
dem man in der gegebenen Differentialgleichung die Werte von $y, y', y'', \ldots$

$$' = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} [\varkappa \psi_\varkappa(\zeta) x^{\varkappa-1} - n \psi'_\varkappa(\zeta) x^{\varkappa-n-1}],$$

$$\sum_{=0}^{\infty} [\varkappa(\varkappa-1)\psi_\varkappa(\zeta) x^{\varkappa-2} - n(2\varkappa-n-1)\psi'_\varkappa(\zeta) x^{\varkappa-n-2} + n^2 \psi''_\varkappa(\zeta) x^{\varkappa-2n-2}]$$

f. einsetzt, nach Potenzen von x ordnet, dabei aber alle $\psi, \psi', \ldots$ als
n x unabhängige Parameter betrachtet und den Koeffizienten einer jeden
tenz von x gleich Null setzt.

Die Anwendung auf die Differentialgleichung $(1-x)y - x^2 \frac{dy}{dx} = 1$, welcher
e Funktion $\frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} Li(e^{\frac{1}{x}})$ genügt, liefert, bei $n=1$, für die Funktionen ψ die

Bestimmungsgleichungen $\psi_0'(\zeta)+\psi_0(\zeta)=1$, $\psi_\varkappa'(\zeta)+\psi_\varkappa(\zeta)=\varkappa\psi_{\varkappa-1}(\zeta)$ und die Integraldarstellung, konform (28)

$$y=\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\psi_\varkappa(\zeta)x^\varkappa,\quad \psi_\varkappa(\zeta)=\varkappa![1-e_\varkappa(\zeta)e^{-\zeta}]=\zeta^{\varkappa+1}\int_0^1 t^\varkappa e^{-\zeta t}dt$$

ersichtlich mit der Konvergenzbedingung $|\zeta x|<1$, das heißt x und c dürfen alle reellen oder komplexen Werte annehmen, bei welchen $|1-cx|<1$ ist.

Auf naheliegende Verallgemeinerungen der obigen Annahme für y und auf die Möglichkeit einer Umordnung nach Potenzen von ζ sei hier bloß verwiesen.

Über affine Geometrie XXVII.
esche F_2, Affinnormale und mittlere Affinkrümmung

Von

Ludwig Berwald in Prag.

Mit dem folgenden Beitrag zur affinen Flächentheorie[1]) beabsichtige , die neuesten affingeometrischen Untersuchungen mit einigen bereits aume Zeit vorliegenden flächentheoretischen Arbeiten in Verbindung zu ngen.

Den Ausgangspunkt dabei bildet eine schon wiederholt behandelte gularitätenfreie Fläche zweiter Ordnung, die mit jedem Punkte all-neiner Lage irgendeiner regulären[2]) analytischen Fläche projektiv-invariant bunden — und im Falle einer regulären Regelfläche mit der in diesem nkte oskulierenden Fläche zweiter Ordnung identisch — ist: die sogenannte esche F_2 des Flächenpunktes[3]). Im folgenden wird nun gezeigt, daß

[1]) Der Grund zur affinen Flächentheorie wurde in folgenden Abhandlungen ge-: G. Pick, Über affine Geometrie IV: Differentialinvarianten der Flächen gegen-r affinen Transformationen, Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) **69** (1917), S. 107—136 . G. IV"). — W. Blaschke, Über affine Geometrie V: Kennzeichnende Eigen-aften des Ellipsoids, Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) **69** (1917), S. 166—206 („A. G. V"). — rselbe, Über affine Geometrie XII: Von den Eiflächen, Ber. Ges. Lpz. (math.-rs.) **70** (1918), S. 13—37 („A. G. XII"). — J. Radon, Über affine Geometrie XVI: Die ndgleichungen der affinen Flächentheorie, Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) **70** (1918), 1—107 („A. G. XVI").

[2]) Mit diesem Namen bezeichnet Herr E. Study [Über einige imaginäre Minimal-hen, Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) **63** (1911), S. 14—26] die analytischen Flächen, denen von einem Punkte allgemeiner Lage zwei *bestimmte* und in der Umgebung Punktes *getrennte* asymptotische Linien ausgehen. Im komplexen Gebiet ist dieser griff wesentlich verschieden von dem einer nicht-abwickelbaren Fläche.

[3]) a) S. Lie, Untersuchungen üb. Differentialgleichungen I, Forh. Selsk. Christ., 1882, h. 21, 12 Seiten; auf S. 1. — b) A. Demoulin, Sur la théorie des lignes asympto-ues, C. R. ac. sc. Paris **147** (1908), S. 413—415. — c) Derselbe, Sur la quadrique Lie, ebenda S. 493—496. — d) Derselbe, Sur quelques propriétés des surfaces rbes, ebenda S. 565—568. — e) P. Franck, Über die Liesche F_2 eines Flächen-nktes, Sitzungsber. Berl. Math. Ges. **13** (1914), S. 110—127. — f) Derselbe, Zur kussion der Gleichung der Lieschen F_2 eines Flächenpunktes, Mitteil. Math. Ges.

die Affinnormale und die mittlere Affinkrümmung in jedem solchen Punkte der gegebenen Fläche nichts anderes sind, als die Affinnormale und die mittlere Affinkrümmung der Lieschen F_2 dieses Punktes. Damit erweisen sich insbesondere die Flächen der mittleren Affinkrümmung Null, oder die *Affin-Minimalflächen* als eine längst bekannte Flächenklasse[4]), die Herr P. Franck[5]) die *paraboloidischen Flächen* genannt hat.

Eine bemerkenswerte Gattung von regulären Flächen bilden auch diejenigen, bei denen für jeden Flächenpunkt allgemeiner Lage ein affiner Hauptkrümmungsmittelpunkt mit dem eigentlichen oder uneigentlichen Mittelpunkt der zugehörigen Lieschen F_2 zusammenfällt. Es sind die zum Teil bereits untersuchten[6]) Flächen, bei denen in jedem Punkte die beiden affinen Hauptkrümmungsradien einander gleich sind. Genauer betrachtet werden hier nur diejenigen Flächen dieser Art, für welche der Ort der affinen Hauptkrümmungsmittelpunkte in eine Kurve oder einen einzigen Punkt entartet. Die Flächen, deren Affinnormalen sämtlich durch einen eigentlichen oder uneigentlichen Punkt, das „Zentrum" der Fläche, laufen, die sogenannten *Affinsphären*[7]), finden sich unter anderen Namen gleichfalls schon in der Literatur vor: diejenigen mit uneigentlichem Zentrum sind besondere Affin-Minimalflächen[8]), die übrigen hat Herr G. Tzitzéica unter dem Namen *S-Flächen* in einer Reihe von Abhandlungen[9]) unter-

---

Hamburg 5 (1914), S. 113–129. — g) G. Scheffers, Über zwei mit einem Flächenpunkt verknüpfte Flächen zweiter Ordnung. Sitzungsber. Berl. Math. Ges. 14 (1915), S. 68–79. — Wie ich nachträglich bemerke, tritt die Liesche F_2 eines Flächenpunktes auch bei Herrn E. J. Wilczynski auf. [Projective differential geometry of curved surfaces. Second memoir. Trans. Amer. Math. Soc. 9 (1908), S. 79–120; insb. S. 81 ff.].

[4]) a) G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces III, Paris 1894, S. 368–374; IV, Paris 1896, S. 512 („Leçons"). — b) A. Demoulin, a. a. O. [3]) c). — c) P. Franck, Über paraboloidische Flächen. Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 23 (1914), S. 49–53. — d) Derselbe, ebenda S. 343–352.

[5]) P. Franck, a. a. O. [3]) f); [4]) c), d).

[6]) W. Blaschke, A. G. XII, § 4.

[7]) W. Blaschke, A. G. V, §§ 8, 9; A. G. XII, § 4; J. Radon, A. G. XVI, § 6. — Die Bezeichnungen „Affinsphäre" und „Zentrum" bei J. Radon. — Die nichtgeradlinigen Affinsphären sind affin spezialisierte Flächen mit unbestimmten Direktrixkurven. Vgl. E. J. Wilczynski, Über Flächen mit unbestimmten Direktrixkurven. Math. Ann. 76 (1914), S. 129–160.

[8]) Über sie vergleiche insbesondere: a) E. Goursat, Sur les lignes asymptotiques, Bull. Soc. Math. France 24 (1896), S. 43–51. — b) A. Demoulin, a. a. O. [3]) c). — Siehe auch E. J. Wilczynski, a. a. O. [7]), S. 138, 157 ff.

[9]) G. Tzitzéica, Sur une nouvelle classe de surfaces, C. R. ac. sc. Paris 144 (1907), S. 1257–1259; Sur certaines surfaces réglées, ebenda 145 (1907), S. 1132–1133; Sur une classe de surfaces, ebenda 146 (1908), S. 165–166; Sur une nouvelle classe de surfaces, Rend. Circ. mat. Palermo 25 (1908), S. 180–187; 28 (1909), S. 210–216; Sur une nouvelle classe de surfaces, Rom, 4. Math.-Kongreß 1909, 2, S. 304–308. Außerdem auch: A. Demoulin, Sur les surfaces réglées, C. R. ac. sc. Paris 146 (1908), S. 1381–1384 und a. a. O. [3]) c).

cht. Die regulären Flächen, bei denen der Ort des (auf jeder Affinrmale einzigen) affinen Hauptkrümmungsmittelpunktes eine Kurve ist, d die *nicht-affinsphärischen regulären Regelflächen*[10]).

Nach dem Gesagten ist es nicht weiter verwunderlich, daß eine ganze zahl von Größen, die in die affine Krümmungstheorie eingehen, de facto, nn auch natürlich nicht dem Begriffe nach, bereits in den zitierten eren Arbeiten vorkommt[11]). Zwei von den Verfassern dieser Arbeiten, e Herren G. Tzitzéica und A. Demoulin, haben auch den Zusammenng zwischen ihren Untersuchungen und der Geometrie der affinen Gruppe kannt.

Der eigentlichen Untersuchung über die im vorhergehenden berührten genstände (§§ 2, 3) habe ich einen Abschnitt vorausgeschickt, in dem mit einer Zusammenstellung der benötigten Begriffe und Formeln aus r affinen Flächentheorie die Mitteilung einer Reihe von vermutlich neuen tzen verbinde, die sich zumeist auf die geometrische Deutung jener rmeln beziehen (§ 1).

§ 1.

Die Asymptotenlinien als Parameterkurven.

1. Wir bewegen uns in dieser Abhandlung durchaus im komplexen reich, und betrachten ein ganz im Endlichen liegendes, nur reguläre nkte enthaltendes Stück einer analytischen Fläche, von dem wir voraustzen, daß durch jeden seiner Punkte zwei bestimmte und in der Umbung des Punktes getrennte Asymptotenlinien der Fläche laufen. Ein ches Flächenstück nennen wir im folgenden kurz eine *reguläre Fläche*[12]).

Um allzu häufige Verweisungen auf die zitierten Arbeiten von G. Pick, . Blaschke und J. Radon zu vermeiden, stellen wir in diesem Paraaph die Formeln und Begriffe der affinen Flächentheorie zusammen, soeit wir sie brauchen. Dabei werden sich auch einige unseres Wissens

[10]) Dieser Satz im wesentlichen schon bei A. Demoulin, a. a. O. [3]) c). Vgl. auch [11]).

[11]) So tritt bei den Herren G. Tzitzéica, A. Demoulin und P. Franck impli- die Affinnormale auf (zumeist als Gerade vom Flächenpunkt $\mathfrak{x}$ nach dem Mittelnkte der Lieschen F_2 oder als Gerade durch $\mathfrak{x}$ von der Richtung $\mathfrak{x}_{pq}$, wenn p, q die rameter der Asymptotenlinien und die Indizes Ableitungen nach p und q bedeuten); A. Demoulin außerdem die beiden affinen Hauptkrümmungsmittelpunkte von $\mathfrak{x}$ Brennpunkte der Affinnormalen von $\mathfrak{x}$) und die Affinkrümmungslinien (als Schnittrven der abwickelbaren Flächen der Affinnormalenkongruenz mit der gegebenen iche), dann aber auch gewisse Größen p, q, r; p', q', r'; k, δ, die sich auf die in dieser Abhandlung verwendeten zurückführen lassen. Auch die Gleichung § 1 (13) Affinkrümmungslinien findet sich bei A. Demoulin, a. a. O. [3]) c).

[12]) Wir haben uns hier, *um für das folgende eine kurze Redeweise zu haben*, eine änderung der von Herrn E. Study gegebenen Begriffsbestimmung [vgl. [2])] erlaubt, rauf wir ausdrücklich aufmerksam machen.

neue Resultate ergeben, die wir hier allerdings zumeist ohne Beweis bringen, um die Abhandlung nicht über Gebühr auszudehnen.

2. Die affine Flächentheorie kann aufgefaßt werden als Invariantentheorie zweier simultanen Differentialformen, von denen die eine quadratisch, die andere kubisch ist. Wenn wir die Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(p, q)$ auf ihre Asymptotenlinien p, q als Parameterkurven beziehen, wie das in dieser Abhandlung ausnahmslos geschehen soll, so können wir die quadratische Grundform folgendermaßen schreiben:

$$2\varphi\, dp\, dq.^{13}) \tag{1}$$

Die kubische Grundform hat dann die Gestalt:

$$P dp^3 + Q dq^3. \tag{2}$$

In (1) und (2) bedeuten die (analytischen) Funktionen φ, P, Q folgendes:

$$\varphi = \sqrt{-i(\mathfrak{x}_{pq}\mathfrak{x}_p\mathfrak{x}_q)}, \qquad (i^2 = -1), \tag{3}$$

und

$$P = +\frac{i}{\varphi}(\mathfrak{x}_{pp}\mathfrak{x}_p\mathfrak{x}_{pq}), \qquad Q = -\frac{i}{\varphi}(\mathfrak{x}_{qq}\mathfrak{x}_q\mathfrak{x}_{pq}), \tag{4}$$

wenn die angehängten Indizes partielle Differentiation nach p und q, und die Klammerausdrücke dreireihige Determinanten bezeichnen. Nach Voraussetzung ist weiter:

$$L = (\mathfrak{x}_{pp}\mathfrak{x}_p\mathfrak{x}_q) = 0, \quad M = (\mathfrak{x}_{pq}\mathfrak{x}_p\mathfrak{x}_q) \neq 0, \quad N = (\mathfrak{x}_{qq}\mathfrak{x}_p\mathfrak{x}_q) = 0. \tag{5}$$

Die beiden Grundformen sind apolar und haben deshalb nur eine absolute Invariante:

$$\sigma = \frac{P \cdot Q}{\varphi^3}. \tag{6}$$

Ferner bezeichnen wir das Gaußsche Krümmungsmaß der quadratischen Grundform mit ψ:

$$\psi = -\frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial p\, \partial q}. \tag{7}$$

3. Mit der Fläche affin-kovariant verbunden ist das von Herrn W. Blaschke[14]) eingeführte *Krümmungsbild*:

$$\tilde{\mathfrak{x}} = -\frac{\mathfrak{x}_{pq}}{\varphi}. \tag{8}$$

Die Gerade durch den Flächenpunkt $\mathfrak{x}$ parallel zum Vektor $\tilde{\mathfrak{x}}$ ist die *Affinnormale* dieses Punktes.

---

[13]) Vgl. zu diesem ganzen Paragraph W. Blaschke, A. G. XII, namentlich die §§ 6, 8. — Wir schreiben alle in diesem Paragraph auftretenden Differentialformen *absolut*-invariant (gegenüber inhaltstreuen Affinitäten).

[14]) W. Blaschke, A. G. V, § 4.

Wegen

$$(\mathfrak{x}_p\,\mathfrak{x}_q\,\tilde{\mathfrak{x}}) = -i\varphi$$

$\tilde{\mathfrak{x}}$, $\mathfrak{x}_p$, $\mathfrak{x}_q$ drei linear unabhängige Vektoren. Man kann daher die toren $\mathfrak{x}_{pp}$, $\mathfrak{x}_{pq}$, $\mathfrak{x}_{qq}$ durch diese drei Vektoren linear ausdrücken und ält so das *erste System von Grundgleichungen der affinen Flächentorie*, nämlich die Gleichungen:

a)
$$\begin{cases} \mathfrak{x}_{pp} = \dfrac{\varphi_p}{\varphi}\mathfrak{x}_p + \dfrac{P}{\varphi}\mathfrak{x}_q, \\ \mathfrak{x}_{qq} = \dfrac{Q}{\varphi}\mathfrak{x}_p + \dfrac{\varphi_q}{\varphi}\mathfrak{x}_q, \end{cases}$$

die mit (8) identische Gleichung:

b)
$$\mathfrak{x}_{pq} = -\varphi\cdot\tilde{\mathfrak{x}}.$$

Das *zweite System von Grundgleichungen* drückt die Vektoren $\tilde{\mathfrak{x}}_p$, $\tilde{\mathfrak{x}}_q$ ar durch $\mathfrak{x}_p$, $\mathfrak{x}_q$ aus:

)
$$\begin{cases} \tilde{\mathfrak{x}}_p = (\psi-\sigma)\,\mathfrak{x}_p - \dfrac{P_q}{\varphi^2}\mathfrak{x}_q, \\ \tilde{\mathfrak{x}}_q = -\dfrac{Q_p}{\varphi^2}\mathfrak{x}_p + (\psi-\sigma)\,\mathfrak{x}_q. \end{cases}$$

Schließlich bestehen noch die folgenden beiden Integrabilitätsbedingungen der Gleichungen (10 a):

)
$$\begin{cases} (\psi-\sigma)_p = \dfrac{P\cdot Q_p}{\varphi^3} - \dfrac{1}{\varphi}\cdot\left(\dfrac{P_q}{\varphi}\right)_q, \\ (\psi-\sigma)_q = \dfrac{Q\cdot P_q}{\varphi^3} - \dfrac{1}{\varphi}\cdot\left(\dfrac{Q_p}{\varphi}\right)_p. \end{cases}$$

4. Aus den Gleichungen (10 a, b) erhält man ohne Schwierigkeit:

)
$$(\mathfrak{x}_p\,\mathfrak{x}_{pp}\,\mathfrak{x}_{ppp}) = iP^2, \qquad (\mathfrak{x}_q\,\mathfrak{x}_{qq}\,\mathfrak{x}_{qqq}) = -iQ^2$$

nn also $P(Q)$ identisch verschwindet, so sind die Asymptotenlinien = konst. (p = konst.) der Fläche ebene Kurven und daher gerade Linien, übrigens bekannt ist. Die Umkehrung des Satzes ist evident.

Wenn $P \neq 0$ ($Q \neq 0$), so hat man für das *Affinbogenelement* [15]) $^{(p)}$, $(d\lambda^{(q)})$ der Asymptotenlinien q = konst. (p = konst.) im Punkte $\mathfrak{x}$:

$$d\lambda^{(p)} = (\sqrt{i}\cdot P)^{\frac{1}{3}}\,dp, \qquad d\lambda^{(q)} = (\sqrt{-i}\cdot Q)^{\frac{1}{3}}\,dq\ [16]).$$

[15]) Vgl. G. Pick, Über affine Geometrie XV: Affingeometrie der Kurven höherer ıme, Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) **70** (1918), S. 76–90, § 1; E. Salkowski, Über ıe Geometrie XVIII. Zur Differentialgeometrie der Raumkurven. Ber. Ges. Lpz. th. phys.) **70** (1918), S. 160–176 oder R. Weitzenböck, Über affine Geometrie. nnormalen bei Raumkurven. Sitzungsber. Ak. Wien IIa, **127** (1918), 969–997, § 5.

[16]) *Die Differentiationen nach den Affinbögen* $d\lambda^{(p)}$, $d\lambda^{(q)}$ *der Asymptotenlinien* gegenüber den *inhaltstreuen* Affinitäten invariante Operationen. Setzt man:

$$\frac{df}{d\lambda^{(p)}} = \vartheta_1 f, \qquad \frac{df}{d\lambda^{(q)}} = \vartheta_2 f,$$

Im Falle einer nicht-geradlinigen regulären Fläche ($\sigma \neq 0$) kann man jetzt die quadratische Grundform (1) auch so schreiben:

$$(1^*) \qquad \sigma^{-\frac{1}{3}} \cdot d\lambda^{(p)} d\lambda^{(q)}$$

und daher auch für φ, dp, dq in (3), (8), (9) bezüglich $\sigma^{-\frac{1}{3}}$, $d\lambda^{(p)}$, $d\lambda^{(q)}$ setzen, so daß aus (9) folgt:

$$(6^*) \qquad \sigma = \frac{i}{\left(\tilde{\xi}\, \frac{\partial \xi}{\partial \lambda^{(p)}}\, \frac{\partial \xi}{\partial \lambda^{(q)}}\right)^3},$$

d. h. *wenn man die drei Vektoren* $\tilde{\xi}$, $\frac{\partial \xi}{\partial \lambda^{(p)}}$, $\frac{\partial \xi}{\partial \lambda^{(q)}}$ *von einem festen Anfangspunkte ausgehen läßt, so ist die Invariante* σ *gleich der mit* $\left(-\frac{i}{6}\right)$ *multiplizierten dritten Potenz des reziproken Tetraedervolumens, das der feste Punkt mit den Endpunkten der drei Vektoren bestimmt.*

Endlich kann die kubische Grundform (2) jetzt folgendermaßen geschrieben werden:

$$(2^*) \qquad \frac{1}{\sqrt{i}} d\lambda^{(p)3} + \frac{1}{\sqrt{-i}} d\lambda^{(q)3},$$

wodurch ihre absolute Invarianz gegenüber den inhaltstreuen Affinitäten recht anschaulich wird.

5. Daß die kubische Grundform (2), gleich Null gesetzt, drei affininvariant mit der Fläche verbundene Fortschreitungsrichtungen[16a]) durch den Punkt ξ in dessen Tangentenebene liefert, zeigt auch *die geometrische Bedeutung dieser drei Fortschreitungsrichtungen*: *Bei einer nicht-geradlinigen regulären Fläche* ($\sigma \neq 0$)[17]) *sind die Affinnormalschnitte des Punktes durch diese Richtungen unter allen Affinnormalschnitten des Punktes dadurch charakterisiert, daß ihre Affinnormale in* ξ *mit der Affinnormalen der Fläche in* ξ *zusammenfällt.* Unter einem Affinnormalschnitt des Punk

---

so gilt die Beziehung:

$$(\vartheta_1 \vartheta_2 - \vartheta_2 \vartheta_1) f = \vartheta_2 \left(\log \sqrt[3]{P}\right) \cdot \vartheta_1 f - \vartheta_1 \left(\log \sqrt[3]{Q}\right) \cdot \vartheta_2 f.$$

Bei K. Zórawski, Über die Differentialinvarianten der Fläche in bezug auf die lineare Gruppe und über Translationsflächen, Bull. ac. sc. Cracovie 1906, S. 865–901 finden sich zwei gegenüber *allen* Affinitäten invariante Operationen Uf, Vf, die bis auf Zahlenfaktoren mit

$$\sigma^{-\frac{1}{3}} \cdot \vartheta_1 f, \qquad \sigma^{-\frac{1}{3}} \cdot \vartheta_2 f$$

identisch sind.

[16a]) (Anm b. d. Korr.) Die drei in Rede stehenden Fortschreitungsrichtungen sind nicht nur *affin*-, sondern auch *projektiv*-invariant mit der Fläche verbunden. Sie treten zuerst bei G. Darboux auf [Sur le contact des courbes et des surfaces. Bull. sc. math. astr. (2) 4 (1880), S. 348–384], später, anders definiert, bei C. Segre, Complementi alla teoria delle tangenti coniugate di una superficie. Rend. Acc. Lincei Roma (5) 17II (1908), S. 405–412.

[17]) In den folgenden Sätzen wird vorausgesetzt, daß die als Identität aufgeschlossene Gleichung $\sigma = 0$ auch im betrachteten Punkte ξ nicht erfüllt ist.

$\mathfrak{x}$ ist dabei natürlich die Schnittkurve der Fläche mit einer Ebene durch Affinnormale der Fläche in $\mathfrak{x}$ verstanden.

Es gelten nämlich die folgenden Sätze über die Affinnormalen ebener nitte einer Fläche:

Legt man durch einen Punkt $\mathfrak{x}$ einer nicht-geradlinigen regulären iche alle Affinnormalschnitte, so bilden deren Affinnormalen im nkte $\mathfrak{x}$ einen (rationalen) Kegel vierter Ordnung, der die Affinnormale Fläche in $\mathfrak{x}$ zur dreifachen Erzeugenden hat und die Tangentenebene Punktes $\mathfrak{x}$ längs der beiden Asymptoten von $\mathfrak{x}$ berührt.

Legt man durch eine vom Punkte $\mathfrak{x}$ ausgehende und in der Tangenten-ne von $\mathfrak{x}$ liegende Fortschreitungsrichtung α alle möglichen von der ngentenebene verschiedenen Ebenen, so bilden die in $\mathfrak{x}$ errichteten innormalen ihrer Schnittkurven mit der Fläche eine Ebene, wie schon Transon[18]) angegeben hat. *Diese Ebene läuft durch die zu α kon-ierte Fortschreitungsrichtung α' der Fläche. Dabei ist vorausgesetzt, α keine Asymptotenrichtung von $\mathfrak{x}$ ist.*

Bei einer nicht-quadratischen regulären Regelfläche fallen die drei ch Nullsetzen von (2) gegebenen Fortschreitungsrichtungen alle in die eugende der Fläche durch den Punkt $\mathfrak{x}$. Für eine singularitätenfreie che zweiter Ordnung ist die Grundform (2) bekanntlich identisch Null.

6. Die Flächenkurven, längs deren die Affinnormalen der Fläche eine vickelbare Fläche bilden, heißen die *Affinkrümmungslinien* der Fläche. e Differentialgleichung lautet:

$$\frac{P_q}{\varphi} dp^2 - \frac{Q_p}{\varphi} dq^2 = 0. \tag{)}$$

Wenn $P_q \cdot Q_p \neq 0$ ist[19]), so gehen durch den Punkt $\mathfrak{x}$ der Fläche zwei rennte Affinkrümmungslinien, deren Tangenten in $\mathfrak{x}$ konjugierte Tangenten Fläche sind. Auf der Affinnormalen von $\mathfrak{x}$ liegen dann zwei *affine uptkrümmungsmittelpunkte*, d. h. die Berührungspunkte dieser Affin-malen mit den Rückkehrkanten der beiden abwickelbaren Flächen von nnormalen, die sie enthalten. Sie sind durch:

$$\mathfrak{v}_k = \mathfrak{x} - \varrho_k \bar{\mathfrak{x}}, \qquad (k = 1, 2) \tag{)}$$

eben, wo für die *affinen Hauptkrümmungsradien* ϱ_1, ϱ_2 die beiden rzeln der Gleichung:

$$\left\{(\psi - \sigma)^2 - \frac{P_q Q_p}{\varphi^4}\right\} \varrho^2 - 2(\psi - \sigma)\varrho + 1 = 0 \tag{)}$$

[18]) A. Transon, Recherches sur la courbure des lignes et des surfaces. J. math. pl. 6 (1841), S. 191—208. — Vgl. auch G. Darboux, a. a. O. [16a]), S. 364.

[19]) Der Fall $P_q \cdot Q_p = 0$ wird weiter unten besprochen werden (§ 3).

zu nehmen sind. Es ist also:

$$\begin{cases} \psi - \sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right), \\ (\psi - \sigma)^2 - \frac{P_q \cdot Q_p}{\varphi^4} = \frac{1}{\varrho_1 \cdot \varrho_2}, \end{cases} \tag{16}$$

und:

$$\frac{P_q \cdot Q_p}{\varphi^4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)^2. \tag{17}$$

In Analogie mit der gewöhnlichen Krümmungstheorie nennt man $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)$ die *mittlere Affinkrümmung*, $\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}$ das *affine Krümmungsmaß* der Fläche im Punkte $\mathfrak{x}$[20]).

7. Wir schalten an dieser Stelle *einige Sätze über das Krümmungsbild* ein, die zwar mit dem Folgenden in keinem direkten Zusammenhang stehen, aber an sich vielleicht nicht ohne Interesse sind.

Das Krümmungsbild $\tilde{\mathfrak{x}}$ ist nach seiner Definition (8) für jede reguläre Fläche eigentlich. Es ist dann und nur dann selbst eine Fläche, wenn die Urfläche $\mathfrak{x}$ ein von Null verschiedenes affines Krümmungsmaß hat. Wenn die Fläche $\mathfrak{x}$ auf jeder Affinnormalen einen uneigentlichen affinen Hauptkrümmungsmittelpunkt besitzt, während der andere (von Ausnahmestellen abgesehen) eigentlich ist, so ist das Krümmungsbild eine Kurve. Bei den regulären Flächen mit lauter parallelen Affinnormalen (vgl. Nr. 16) endlich reduziert sich das Krümmungsbild auf einen Punkt.

Wenn das Krümmungsbild eine Fläche ist, so stellt die Gleichung

$$\frac{P_q}{\varphi} dp^2 - 2\varphi(\psi - \sigma) dp\, dq + \frac{Q_p}{\varphi} dq^2 = 0 \tag{18}$$

auf der Urfläche $\mathfrak{x}$ diejenigen Kurven dar, die den Asymptotenlinien des Krümmungsbildes $\tilde{\mathfrak{x}}$ entsprechen[21]).

---

[20]) Für das affine Krümmungsmaß der Fläche im Punkte $\mathfrak{x}$ läßt sich, unter der Voraussetzung, daß es nicht verschwindet und daß keine der beiden Affinkrümmungslinien des Punktes $\mathfrak{x}$ in diesem Punkte eine stationäre Schmiegungsebene hat, auch die folgende affingeometrische Deutung geben: Man bezeichne mit σ_1, σ_2; $\tilde{\sigma}_1$, $\tilde{\sigma}_2$ bezüglich die Affinbögen der ersten (zweiten) Affinkrümmungslinie durch $\mathfrak{x}$ und der entsprechenden Kurven des Krümmungsbildes $\tilde{\mathfrak{x}}$. Dann hat man:

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \left(\frac{d\tilde{\sigma}_1}{d\sigma_1} \cdot \frac{d\tilde{\sigma}_2}{d\sigma_2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

[21]) Die linke Seite von (18) ist, bis auf einen Zahlenfaktor, nichts anderes als die quadratische Kovariante $\lambda\, du^2 + 2\mu\, du\, dv + \nu\, dv^2$ des Herrn J. Radon (A. G. XVI, § 7), für deren Verschwinden somit eine geometrische Deutung gefunden ist. — *Die Differentialformen* (1), (18) *und* (13) *stehen*, wenn man von einem ganz unwesent-

Aus diesem Satze fließt eine Reihe von weiteren:

1. Diejenigen regulären Flächen, deren Affinnormalen sämtlich durch nen *eigentlichen* festen Punkt gehen (vgl. Nr. 16), sind dadurch charakterirt, daß die Asymptotenlinien des Krümmungsbildes den Asymptotenlinien r Urfläche entsprechen

2. Auf denjenigen regulären Flächen der mittleren Affinkrümmung ıll, die auf jeder Affinnormale zwei getrennte affine Hauptkrümmungsttelpunkte besitzen (vgl. Nr. 9, 13), entspricht den Asymptotenlinien des rümmungsbildes ein konjugiertes System, dessen Kurven in jedem Punkte e Affinkrümmungslinien harmonisch trennen.

3. Bei den Flächen mit beständig zusammenfallenden affinen Hauptümmungsmittelpunkten, deren mittlere Affinkrümmung nicht Null ist, d deren Affinnormalen nicht sämtlich durch einen Punkt laufen, entricht der einen Schar von Asymptotenlinien des Krümmungsbildes die ne Schar von Asymptotenlinien der Urfläche, nämlich die, deren Kurven gleich Affinkrümmungslinien sind (vgl. Nr. 15).

Reduziert sich das Krümmungsbild auf eine Kurve oder auf einen nkt, so verschwindet die Diskriminante von (18) und umgekehrt. Im lle einer Kurve sind die Linien (18) diejenigen Affinkrümmungslinien r gegebenen Fläche, längs deren die Affinnormalen parallel sind. Wenn s Krümmungsbild ein Punkt ist, und nur dann, sind die Kurven (18) bestimmt.

Auf den Beweis aller dieser Sätze können wir hier nicht eingehen.

§ 2.

Die Liesche F_2 eines Flächenpunktes und die affinen Krümmungseigenschaften der Fläche.

8. Wir gehen jetzt daran, die affine Krümmungstheorie mit der sonannten Lieschen F_2 eines Flächenpunktes in Verbindung zu bringen. n Ausgangspunkt dabei bildet ein Satz von S. Lie[22]), der sich etwa gendermaßen aussprechen läßt:

nen numerischen Faktor absieht, *genau in demselben gegenseitigen Verhältnisse, wie erste und zweite Fundamentalform der metrischen Flächentheorie und ihre mittels Jacobischen Funktionaldeterminante gebildete absolute quadratische Simultanariante. Außerdem haben die mittlere Affinkrümmung und das affine Krümmungsß, als Simultaninvarianten von* (1) *und* (18), *zu diesen Differentialformen n dieselbe Beziehung wie die mittlere Krümmung und das Krümmungsmaß der trischen Theorie zu den zugehörigen beiden ersten Fundamentalformen.* Die affine ümmungstheorie läßt sich demnach als Theorie der simultanen invarianten Bildungen zwei quadratischen Differentialformen (1) und (18) auffassen.

[22]) a. a. O. [3]) a). — Bewiesen wurde der Satz erst von A. Demoulin [3]) d). J. Wilczynski, a. a. O. [3]) und P. Franck [3]) e). Weitergehende Betrachtungen G. Scheffers [3]) g).

Wenn man durch einen Punkt einer regulären Fläche die beiden Asymptotenlinien legt, auf der ersten zwei zu diesem Punkt benachbarte Punkte wählt und durch alle drei Punkte die Asymptoten der zweiten Schar zieht, so bestimmen diese in der Grenzlage *dieselbe* Fläche zweiten Grades, wie die Asymptoten, die man erhält, wenn man auf der anderen Asymptotenlinie des Ausgangspunktes zwei zu ihm benachbarte Punkte wählt und durch diese drei Punkte die Asymptoten der ersten Schar zieht.

Die Fläche zweiten Grades, deren Existenz durch diesen Satz ausgesprochen wird, heißt die *Liesche F_2 des betrachteten Flächenpunktes.* Sie ist offenbar projektiv-kovariant mit der gegebenen Fläche verbunden. Von ihrer Gleichung:

$$a_{00} + 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 + 2a_{03}x_3 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

brauchen wir hier nicht die von Herrn P. Franck[23]) berechneten Werte der Koeffizienten selbst, sondern nur den ihrer Diskriminante $A = |a_{00}a_{11}a_{22}a_{33}|$ und der Unterdeterminanten A_{0k} der a_{0k} $(k = 0, 1, 2, 3)$ in dieser Diskriminante.

Wenn:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{19}$$

das quadrierte Bogenelement der Fläche bezeichnet, und

$$EG - F^2 = \Delta^2 \qquad (\Delta^2 \neq 0) \tag{20}$$

gesetzt wird, so hat man:

$$A = \frac{M^6}{\Delta^8} \tag{21}$$

und

$$A_{00} = -\frac{M^4}{\Delta^6}\cdot\mathfrak{Q}; \quad A_{0k} = -\frac{M^4}{\Delta^6}\left(\mathfrak{Q}\cdot x_k - \frac{\partial^2 x_k}{\partial p\,\partial q}\right), \quad (k = 1, 2, 3). \tag{22}$$

In (21) und (22) bedeuten die x_k die Komponenten des Vektors $\mathfrak{x}$, M die mittlere Größe (5) und $\mathfrak{Q}$ den Ausdruck:

$$\mathfrak{Q} = \frac{\partial}{\partial q}\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = \frac{\partial}{\partial p}\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}. \tag{23}$$

Die Christoffelschen Drei-Indizes-Symbole zweiter Art in (23) beziehen sich auf die quadratische Differentialform (19).

Die Formeln (21) bis (23) finden sich im wesentlichen schon in den

[23]) a. a. O. [3]) e). — Auch Herr A. Demoulin hat a. a. O. [3]) d) die Gleichung der Lieschen F_2 aufgestellt, jedoch nur bezogen auf zwei verschiedene mit dem betrachteten Flächenpunkte verbundene Trieder. Siehe auch G. Scheffers [3]) g).

erten[22]) Abhandlungen[24]). Aus (21) schließt man sofort, *daß die sche F_2 für jeden Punkt einer regulären Fläche singularitätenfrei ist*[25]).

9. Wir drücken jetzt $\mathfrak{Q}$ durch die in der affinen Flächentheorie auftenden Größen aus. Das geschieht am einfachsten so, daß man die den Grundgleichungen der gewöhnlichen Flächentheorie (vgl. (5)!):

$$\mathfrak{x}_{pp} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \mathfrak{x}_p + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \mathfrak{x}_q, \quad \mathfrak{x}_{qq} = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \mathfrak{x}_p + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} \mathfrak{x}_q$$

den entsprechenden affingeometrischen Gleichungen (10a) zusammen-. Es folgt:

$$\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{\partial \log \varphi}{\partial p}, \quad \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{\partial \log \varphi}{\partial q},$$

$$\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{P}{\varphi}, \qquad \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{Q}{\varphi},$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial p \, \partial q} + \frac{P \cdot Q}{\varphi^2};$$

r endlich, wegen (6) und (7):

$$\mathfrak{Q} = -\varphi(\psi - \sigma).$$

raus ergibt sich, da nach (3) und (5) $\varphi \neq 0$ ist:

Die Liesche F_2 eines Punktes einer regulären Fläche ist dann und dann ein Paraboloid, wenn die mittlere Affinkrümmung der Fläche diesem Punkte Null ist. Einen solchen Punkt nennen wir einen *paraidischen* Flächenpunkt[26]).

Die regulären Flächen der mittleren Affinkrümmung Null oder die in-Minimalflächen erweisen sich somit als identisch mit den bereits rfach untersuchten[4]) *paraboloidischen Flächen, d. h. denjenigen regun Flächen, bei denen die Liesche F_2 in jedem Punkte ein Paraboloid ist.*

10. Wir nehmen jetzt an, daß im Punkte $\mathfrak{x}$ der betrachteten Fläche $\neq 0$ sei. Dann ist die Liesche F_2 des Punktes eine Mittelpunktsfläche iten Grades. Eine solche besitzt gegenüber inhaltstreuen Affinitäten (wesentliche) absolute Invariante, als die wir die Größe:

$$J = -\frac{A_{00}^4}{A^3}$$

quadrierte reziproke Halbachsenprodukt) wählen wollen. Aus (21),), (26) und (3) folgt:

$$J = (\psi - \sigma)^4,$$

---

[24]) sowie in [4]) d).

[25]) P. Franck, a. a. O. [2]) f).

[26]) Dieser Name wurde von Herrn P. Franck eingeführt, ebenso der Name boloidische Flächen; a. a. O. [2]) f), [4]) c).

d. h. *die rationale absolute Invariante J der Lieschen F_2 eines nic parabolischen Punktes einer regulären Fläche gegenüber inhaltstreu Affinitäten ist gleich der vierten Potenz der mittleren Affinkrümmu der Fläche im betrachteten Punkte.*

11. Für einen paraboloidischen Punkt einer regulären Fläche ist d Mittelpunkt der zugehörigen Lieschen F_2 der uneigentliche Punkt d Geraden des Affinnormalvektors $\tilde{\xi}$, wie aus (22), (26) und (10b) u mittelbar folgt. Aus denselben Gleichungen findet man für den Mitt punkt $\mathfrak{y}$ der Lieschen F_2 eines nicht-paraboloidischen Flächenpunktes:

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x} - \frac{1}{\psi - \sigma}\tilde{\xi}, \tag{29}$$

so daß der Vektor $\mathfrak{x} - \mathfrak{y}$ wieder die Richtung des Affinnormalvektors besitzt. Endlich hat die Affinnormale in jedem eigentlichen Punkte ein singularitätenfreien Fläche zweiten Grades die Richtung nach dem eige lichen oder uneigentlichen Mittelpunkt dieser Fläche[27]). Man hat also:

In jedem Punkte einer regulären Fläche ist die Affinnormale d Fläche identisch mit der Affinnormale der zugehörigen Lieschen F_2.

Damit haben wir zu den bereits bekannten Definitionen der Affi normale eine neue hinzugefügt[28]).

12. Nunmehr können wir auch die Sätze der Nummern 9 und 10 einen einzigen zusammenfassen:

Die mittlere Affinkrümmung einer regulären Fläche ist in jed Punkte gleich der mittleren Affinkrümmung der zugehörigen Lieschen F_2[29]

In der Tat ist die Invariante J einer beliebigen singularitätenfrei Fläche zweiten Grades gleich der vierten Potenz der mittleren Affi krümmung dieser Fläche, so daß der Satz für einen paraboloidisch

---

[27]) G. Pick, A. G. IV, Nr. 10.

[28]) Wir entnehmen jetzt der zitierten Note [3]) c) des Herrn A. Demoulin n die folgende Definition der Affinnormalen:

Längs der Asymptotenlinie $p = \text{konst.}$ ($q = \text{konst.}$), die durch den Punkt $\mathfrak{x}$ Fläche läuft, bilden die Tangenten der Asymptotenlinien $q = \text{konst.}$ ($p = \text{konst.}$) e Regelfläche Σ (Σ'). Die asymptotische Ebene dieser Regelfläche Σ (Σ') für Erzeugende, die durch $\mathfrak{x}$ geht, heiße Π (Π'). Dann ist die Schnittlinie der Ebe Π und Π' die Affinnormale der gegebenen Fläche im Punkte $\mathfrak{x}$.

[29]) Ganz analoge Sätze, wie die in Nr. 9—13 für die regulären Flächen Raume abgeleiteten gelten auch für die krummen Linien in der Ebene. An Stelle der Lieschen F_2 des Flächenpunktes tritt dabei nur der im betrachte Kurvenpunkt oskulierende Kegelschnitt, an die Stelle der mittleren Affinkrümmu der Fläche die Affinkrümmung der ebenen Kurve in diesem Punkte. Allerdings v stehen sich in der Ebene die meisten dieser Sätze ziemlich von selbst.

lächenpunkt ohne weiteres folgt. Im Falle einer Lieschen Mittelpunkts-F_2 eachte man noch, daß die mittlere Affinkrümmung $\overline{\psi}$ der F_2 gleich ihrem eziproken (einzigen) affinen Hauptkrümmungsradius ist. Der Mittelunkt $\mathfrak{y}$ der Lieschen F_2 ist also in diesem Falle auch durch:

30) $$\mathfrak{y} = \mathfrak{x} - \frac{1}{\overline{\psi}}\tilde{\mathfrak{x}}$$

egeben (vgl. (14)). Aus (29) und (30) folgt:

31) $$\psi - \sigma = \overline{\psi}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

13. Durch die Lage der affinen Hauptkrümmungsmittelpunkte eines 'lächenpunktes ist auch die Lage des Mittelpunktes der zugehörigen ieschen F_2 vollkommen bestimmt. Es gilt nämlich der Satz von . Demoulin[30]):

Die beiden affinen Hauptkrümmungsmittelpunkte eines Punktes iner regulären Fläche werden vom Punkte selbst und vom Mittelpunkte er zugehörigen Lieschen F_2 harmonisch getrennt.

Sei zunächst der Flächenpunkt paraboloidisch, also $\psi - \sigma = 0$. Dann ind entweder, wegen (16), seine beiden affinen Hauptkrümmungsradien $_1$, ϱ_2 endlich und entgegengesetzt gleich, oder sie sind beide unendlich roß. Da der Mittelpunkt der Lieschen F_2 für einen paraboloidischen lächenpunkt der uneigentliche Punkt der Affinnormale des Punktes ist, o ist für einen solchen Punkt die Richtigkeit des Satzes gezeigt.

In einem nicht-paraboloidischen Flächenpunkt können zunächst die beiden affinen Hauptkrümmungsradien einander gleich sein. Dann folgt aus (16), daß sie auch gleich dem reziproken Werte der mittleren Affinkrümmung in diesem Punkte sind. (14) und (29) zeigen jetzt weiter, daß der einzige affine Hauptkrümmungsmittelpunkt $\mathfrak{o}$ mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{y}$ der Lieschen F_2 des Flächenpunktes zusammenfällt, wie es unser Satz in diesem Fall verlangt.

Wenn endlich $\psi - \sigma \neq 0$, $\varrho_1 \neq \varrho_2$ ist, so liefern (14), (29) und (16) für das Doppelverhältnis $(\mathfrak{o}_1 \mathfrak{o}_2 \mathfrak{x} \mathfrak{y})$ der vier Punkte den Wert:

(32) $$(\mathfrak{o}_1 \mathfrak{o}_2 \mathfrak{x} \mathfrak{y}) = \frac{\mathfrak{o}_1 - \mathfrak{x}}{\mathfrak{x} - \mathfrak{o}_2} : \frac{\mathfrak{o}_1 - \mathfrak{y}}{\mathfrak{y} - \mathfrak{o}_2} = -\frac{\varrho_1}{\varrho_2} : \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = -1.$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

14. Wenn die beiden affinen Hauptkrümmungsmittelpunkte für einen Punkt einer regulären Fläche zusammenfallen, so ist nach (16) und (17) das *affine Krümmungsmaß* in diesem Punkte gleich dem Quadrate der mittleren Affinkrümmung. Im andern Falle *läßt sich, für einen nicht-paraboloidischen Flächenpunkt, das affine Krümmungsmaß ausdrücken*

[30]) a. a. O. [5])c). Vgl. dazu Anm. [11]). Ein Beweis des Satzes findet sich l. c. nicht.

durch die mittlere Affinkrümmung und durch das Teilverhältnis, in de der Mittelpunkt der Lieschen F_2 die Strecke der beiden affinen Haup krümmungsmittelpunkte teilt.

Dieses Teilverhältnis $t = \frac{\mathfrak{o}_1 - \mathfrak{y}}{\mathfrak{y} - \mathfrak{o}_2}$ hat unter der Voraussetzung $\frac{1}{\varrho_1} +$ für einen nicht-paraboloidischen Flächenpunkt den Wert:

$$t = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}. \tag{33}$$

Aus (33) und (16) erhält man als den gesuchten Ausdruck für das affin Krümmungsmaß:

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{4t(\psi - \sigma)^2}{(1+t)^2} \qquad (t + -1 \tag{34}$$

der auch im Grenzfalle $t = 1$, in dem $\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho_2}$ wird, dasselbe Result liefert wie (16).

Wir merken schließlich auch noch die Formel an:

$$\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} = 2\frac{1-t}{1+t}(\psi - \sigma) \qquad (t + -1 \tag{35}$$

§ 3.

Über die Flächen, bei denen in jedem Punkte die reziproken affine Hauptkrümmungsradien einander gleich sind.

15. Die regulären Flächen, bei denen auf jeder Affinnormalen ein der affinen Hauptkrümmungsmittelpunkte mit dem Mittelpunkte der z gehörigen Lieschen F_2 zusammenfällt, haben nach Nr. 13 zugleich d Eigenschaft, daß die reziproken Werte der beiden affinen Hauptkrü mungsradien einander beständig gleich sind. Aus

$$\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} = 0 \tag{36}$$

folgt dann wegen (17) und (13) weiter:

Auf den regulären Flächen, bei denen in jedem Punkte die rez proken affinen Hauptkrümmungsradien einander gleich sind, ist en weder jede Kurve Affinkrümmungslinie ($P_q = Q_p = 0$), oder es fallen d beiden Scharen von Affinkrümmungslinien miteinander und (daher) m der einen Schar von Asymptotenlinien zusammen ($P_q = 0$, $Q_p + 0$ od $P_q + 0$, $Q_p = 0$).

16. Betrachten wir zunächst die regulären Flächen, für welche identisc

$$P_q = Q_p = 0 \tag{37}$$

ist. Eine solche Fläche besitzt nach (12) konstante mittlere Affinkrü mung $\psi - \sigma$. Wenn außerdem $\psi - \sigma = 0$ ist, so folgt aus den Gl

chungen (11), daß alle Affinnormalen der Fläche parallel sind. Hat man dagegen $\psi - \sigma \neq 0$, so erhält man aus (29) durch Differentiation mit Hilfe von (11) und (12):

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{y}_p &= \frac{1}{\psi-\sigma}\frac{P_q}{\varphi^2}\mathfrak{x}_q + \frac{1}{(\psi-\sigma)^2}\left\{\frac{PQ_p}{\varphi^3} - \frac{1}{\varphi}\left(\frac{P_q}{\varphi}\right)_q\right\}\tilde{\mathfrak{x}}, \\ \mathfrak{y}_q &= \frac{1}{\psi-\sigma}\frac{Q_p}{\varphi^2}\mathfrak{x}_p + \frac{1}{(\psi-\sigma)^2}\left\{\frac{QP_q}{\varphi^3} - \frac{1}{\varphi}\left(\frac{Q_p}{\varphi}\right)_p\right\}\tilde{\mathfrak{x}}, \end{aligned}\right. \tag{38}$$

und diese Gleichungen im Verein mit (37) zeigen, daß alle Affinnormalen der Fläche durch den festen Punkt $\mathfrak{y}$ gehen.

Die Flächen, von denen die Rede ist, senden also alle Affinnormalen durch einen festen eigentlichen oder uneigentlichen Punkt, d. h. sie sind — wie übrigens schon bekannt ist[7]) — die *Affinsphären* oder *affinsphärischen Flächen*. Es empfiehlt sich, eine Affinsphäre *eigentlich* oder *uneigentlich* zu nennen, je nachdem es ihr Zentrum ist: die beiden hiermit unterschiedenen Flächenklassen haben *wesentlich* verschiedene Eigenschaften.

17. Die *reellen* regulären Flächen, für welche

$$P_q \neq 0,\ Q_p = 0 \quad \text{oder} \quad P_q = 0,\ Q_p \neq 0, \tag{39}$$

sind, wenn sie reelle Punkte besitzen, in diesen stets hyperbolisch gekrümmt. Denn die Affinkrümmungslinien der reellen Membran einer solchen Fläche sind ihrer geometrischen Definition nach stets reell. Das gleiche gilt daher auch von der einen, und somit auch von der zweiten Schar von Asymptotenlinien[31]).

18. Wir fragen schließlich nach den besonderen regulären Flächen der betrachteten Art, für die der Ort des affinen Hauptkrümmungsmittelpunktes eine eigentliche oder uneigentliche Kurve ist.

Sei $\mathfrak{y}$ ein regulärer Punkt dieser Kurve. Dann gehen durch $\mathfrak{y}$ ∞^1 Affinnormalen[32]), für deren jede $\mathfrak{y}$ ein doppelt zählender Brennpunkt ist. Aus einem bekannten Satze über Kongruenzen[33]) folgt, daß die Affinnormalen durch $\mathfrak{y}$ in einer Ebene durch die Tangente in $\mathfrak{y}$ an die Kurve der affinen Hauptkrümmungsmittelpunkte liegen. Nun schneiden aber alle Affinnormalen durch $\mathfrak{y}$ die gegebene Fläche längs einer Affinkrümmungslinie. Die Affinkrümmungslinien sind daher ebene Kurven.

---

[31]) Hieraus erklärt sich der *scheinbare* Widerspruch des Satzes in Nr. 15 mit einem Satze bei W. Blaschke, A. G. XII, § 4. Dort werden eben ausdrücklich nur reelle und elliptisch gekrümmte Flächenstücke betrachtet. — Wir haben das Vorhergehende absichtlich so ausführlich dargestellt, um diesen Punkt klarzulegen.

[32]) Wir zählen *komplexe* Konstante.

[33]) G. Darboux, Leçons II, Paris 1889, S. 10 und 15f.

Nach Nr. 15 sind sie ferner Asymptotenlinien der Fläche. Beide Eigen schaften können aber nur dann zusammen bestehen, wenn die Affi krümmungslinien gerade Linien sind. Also[10]):

Die nicht-affinsphärischen regulären Regelflächen sind die einzige regulären Flächen, bei denen beständig $\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho_2}$ *und der Ort des affine Hauptkrümmungsmittelpunktes eine eigentliche oder uneigentliche Kurve is*

Unsere Ableitung zeigt auch, daß die mittlere Affinkrümmung d nicht-affinsphärischen (und somit *aller*) regulären Regelflächen längs jed Erzeugenden konstant ist. Sie kann insbesondere auch bei einer *nich* affinsphärischen regulären Regelfläche auf der ganzen Fläche konstan sein[34]). Die regulären Regelflächen von der mittleren Affinkrümmun Null sind die regulären Regelflächen mit Leitebene[35]).

Den sehr einfachen analytischen Beweis des in dieser Nummer au gesprochenen Satzes überlassen wir dem Leser[36]).

Prag, den 8. Oktober 1919.

---

[34]) Ein Beispiel für die nicht-affinsphärischen regulären Regelflächen konstante von Null verschiedener mittlerer Affinkrümmung bieten die (komplex-) affin Trans formierten der imaginären Serretschen Flächen konstanter Krümmung mit eine Schar von Minimalgeraden.

[35]) P. Franck, a. a. O. [4]) d), Satz 8.

[36]) (Anm. bei der Korrektur.) — Die Literaturangaben der Einleitung sind noc durch folgende Abhandlungen zu ergänzen, die mir erst nach Absendung des Manu skriptes bekannt geworden sind:

Zur Grundlegung der affinen Flächentheorie: R. König, Über affine Geom trie XXIV. Ein Beitrag zu ihrer Grundlegung. Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) (1919), 3–19.

Über Regelflächen, insbesondere über affinsphärische: J. Radon, Über affi Geometrie XVII. Zur Affingeometrie der Regelflächen. Ber. Ges. Lpz. (math.-phys 70 (1918) 147–155. — In dieser Arbeit wird u. a. auch die oskulierende F_2 ein (regulären) Regelfläche betrachtet, und für die Affinnormale und das affine Krüm mungsmaß der *Regelfläche* eine analoge Deutung gegeben, wie es im Vorstehende für die Affinnormale und die mittlere Affinkrümmung einer *beliebigen* reguläre Fläche geschieht. Diese Deutung hat dann Herr W. Blaschke u. a. für die affi Theorie der Raumkurven verwertet: W. Blaschke, Über affine Geometrie XX Raumkurven und Schiebflächen. Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) 71 (1919) 20–2 insbes. S. 25 f.

Wie mir Herr R. Weitzenböck nachträglich (7. November 1919) mitteilt, h auch Herr J. Radon zu dem in Nr. 5 ausgesprochenen Satz über den Kegel d Affinnormalen der Affinnormalschnitte eines Flächenpunktes gelangt.

(Eingegangen am 15. Oktober 1919.)

Über die Laplacesche Reihe. (II. Teil.)

Von

Emil Hilb in Würzburg.

In dem unter dem gleichen Titel in dieser Zeitschrift erschienenen rsten Teil[1]) wurde unter Benützung einer neuen asymptotischen Darellung der Kugelfunktionen in besonders einfacher Weise der grundgende Hilfssatz abgeleitet, der zum Beweise der Konvergenz der arithetischen Mittel erster Ordnung der Laplaceschen Reihe für eine absolut ntegrable Funktion dient. In diesem Teile soll nun der entsprechende ilfssatz für die Summierung der Ordnung $k > \frac{1}{2}$ abgeleitet werden, wobei ie Rechnung natürlich komplizierter wird als im ersten Teil, aber mir och noch wesentlich elementarer und durchsichtiger erscheint, als bei der on Gronwall[2]) auf vollständig andere Weise gewonnenen Ableitung.

§ 1.

Erster Ansatz zum Beweise.

Wir zeigen, daß

$$S_{\omega,k} = \int_0^{\pi} \Big| \sum_{\nu=0}^{n} (2\nu+1) P_\nu(\cos\Theta) \Big(1 - \frac{\nu}{\omega}\Big)^k \Big| \sin\Theta d\Theta \quad \text{mit} \quad n < \omega \leqq n+1$$

ir alle Werte von ω unterhalb einer endlichen Grenze bleibt, wenn $> k > \frac{1}{2}$, dagegen für $k = \frac{1}{2}$ mit ω in das Unendliche wächst. Beanntlich ist diese hier benützte Rieszsche Summationsmethode der von esàro vollständig äquivalent. Wir setzen nun in (1)

$$\int_0^{\pi} = \int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{1}{n}} + \int_{\pi-\frac{1}{n}}^{\pi}. \qquad (2)$$

[1]) Math. Zeitschrift, 5 (1919), S. 17—25; im folgenden zitiert mit I.

[2]) Vgl. I, Anmerkung 4a).

Wegen I (23) bleibt das erste und vierte Integral der rechten Seite alle Werte von n gewiß unterhalb einer endlichen Grenze. Entsprech I (3) ist die Behandlung des dritten Integrals ziemlich analog der zweiten, so daß wir uns im wesentlichen auf dieses letztere beschränk können. Nun ist[3])

$$(3)\quad (2\nu+1)P_\nu(\cos\Theta) = -\frac{1}{\sin\Theta}\left[\frac{dP_{\nu+1}}{d\Theta} - \frac{dP_{\nu-1}}{d\Theta}\right],\quad \nu = 0, 1, 2, \ldots,\ \text{wobei}$$

also nach I (28)

$$(4)\quad \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{d}{d\Theta} \sum_{\nu=0}^{n} (P_{\nu+1} - P_{\nu-1}) \left(1 - \frac{\nu}{\omega}\right)^k \right| d\Theta \leqq T_{\omega,k} + \bar{T}_{\omega,k},$$

wobei

$$(5)\quad T_{\omega,k} = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{d}{d\Theta} \left[\sqrt{\frac{\Theta}{\sin\Theta}} \sum_{\nu=0}^{n} \left(J_0\left(\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\Theta\right) - J_0\left(\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\Theta\right)\right)\left(1-\frac{\nu}{\omega}\right)^k \right] \right|$$

$$(6)\quad \bar{T}_{\omega,k} = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{d}{d\Theta} \left[\frac{1}{\sqrt{\sin\Theta}} \sum_{\nu=0}^{n} \left(R_{\nu+1}((\nu+1)\Theta) - R_{\nu-1}((\nu-1)\Theta)\right)\left(1-\frac{\nu}{\omega}\right)^k \right] \right|$$

Nun bleibt bekanntlich $\bar{T}_{\omega,k}$ unterhalb einer festen Grenze, wenn die für $k = 0$ gilt. Es ist aber

$$(7)\quad \bar{T}_{\omega,0} = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{d}{d\Theta} \left[\frac{1}{\sqrt{\sin\Theta}} \left(- R_{-1} - R_0 + R_n(n\Theta) + R_{n+1}((n+1)\Theta)\right) \right] \right|$$

Dabei sind R_{-1} und R_0 ebenfalls durch I (28) definiert, und es fo daß der absolute Betrag ihres Beitrages zu $\bar{T}_{\omega,0}$ unterhalb einer fes Grenze bleibt. Dasselbe folgt aus I (21) und (25) unmittelbar du direktes Ausführen der Differentiation nach Θ für die beiden ande Summanden, wenn man berücksichtigt, daß[4])

$$(8)\qquad \frac{dJ_0(t)}{dt} = -J_1(t), \qquad \frac{dY_0(t)}{dt} = -Y_1(t),$$

---

[3]) E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen (1878), S. 93.

[4]) Vgl. etwa die Funktionentafeln von Jahnke und Emde, S. 165 und 156

d daß für $J_1(t)$ und $Y_1(t)$ die I (24) entsprechenden Abschätzungen lten.

Es ist also nur zu zeigen, daß $T_{\omega,k}$ unterhalb einer endlichen Grenze eibt.

§ 2.

Summierung einer Reihe und Abschätzung von $U_{\omega,k}$.

Zur Berechnung von $T_{\omega,k}$ setzen wir nach I (40)

$$J_0\left(\left(\nu+\tfrac{3}{2}\right)\Theta\right)-J_0\left(\left(\nu-\tfrac{1}{2}\right)\Theta\right)=-\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\left(\nu+\tfrac{1}{2}\right)\Theta\sin\varphi\right)\sin(\Theta\sin\varphi)\,d\varphi,$$

0) $$(\omega-\nu)^k=\frac{\Gamma(k+1)}{2\pi i}\int\frac{e^{-(\omega-\nu)z}}{(-z)^{k+1}}dz,$$

obei der Integrationsweg in der komplexen z-Ebene von $+\infty$ um den ullpunkt im Uhrzeigersinn herum, dann nach $+\infty$ zurückzuführen ist. urch Summierung der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{n}r^\nu\sin((\nu+\alpha)u)$$

hält man[5])

1) $$T_{\omega,k}=(U_{\omega,k}+V_{\omega,k})\frac{2\Gamma(k+1)}{\pi^2},$$

enn

2) $$U_{\omega,k}=$$

$$=\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}}d\Theta\left|\frac{d}{d\Theta}\left[\sqrt{\frac{\Theta}{\sin\Theta}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\frac{dz\,e^{-\omega z}}{\omega^k(-z)^{k+1}}\cdot\frac{\sin(\Theta\sin\varphi)\sin(\frac{1}{2}\Theta\sin\varphi)(1+e^z)}{1-2e^z\cos(\Theta\sin\varphi)+e^{2z}}\right]\right|,$$

3) $$V_{\omega,k}=\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}}d\Theta\left|\frac{d}{d\Theta}\left[\sqrt{\frac{\Theta}{\sin\Theta}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\frac{dz\,e^{-\omega z}}{\omega^k(-z)^{k+1}}\right.\right.$$

$$\left.\left.\sin(\Theta\sin\varphi)\frac{-e^{(n+1)z}\sin((n+\frac{1}{2})\Theta\sin\varphi)+e^{(n+2)z}\sin((n+\frac{1}{2})\Theta\sin\varphi)}{1-2e^z\cos(\Theta\sin\varphi)+e^{2z}}\right]\right|.$$

---

[5]) Bei der Berechnung des Integrals $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{1}{n}}$ in (2) tritt statt e^z immer $-e^z$ auf, so

aß $|1+2e^z\cos\Theta\sin\varphi+e^{2z}|$ immer oberhalb einer festen von 0 verschiedenen ahl liegt.

Dabei kann für unseren Zweck die untere Grenze von φ durch eine n
wachsendem ω genügend klein werdende Größe ersetzt gedacht werde
der Integrationsweg in der z-Ebene soll so genommen werden, daß
Nullstellen des Nenners außer $z = 0$ außerhalb des Integrationsweges lieg

Wir wenden uns jetzt zur Abschätzung von $U_{\omega,k}$. Dieses kann gr
Werte nur dadurch annehmen, daß der absolute Betrag des Nenners s
klein wird. Es genügt also, wenn wir den Beitrag des Integrals in bez
auf z längs der Schleife von $+1$ um 0 noch $+1$ abschätzen. *Im folg*
den schreiben wir dabei, wenn wir von endlich bleibenden Faktoren o
Summanden absehen, statt $=$ *stets* $\equiv$. Nun ist

$$(14)\qquad \frac{1}{1-2e^z\cos(\Theta\sin\varphi)+e^{2z}} \equiv \frac{-i}{2e^z\sin(\Theta\sin\varphi)}\left[\frac{1}{1-e^{i\Theta\sin\varphi+z}} - \frac{1}{1-e^{-i\Theta\sin\varphi}}\right.$$

$$(15)\qquad \frac{1}{1-e^{\pm i\Theta\sin\varphi+z}} \equiv \frac{1}{z\pm i\Theta\sin\varphi},$$

da die vernachlässigten Glieder $z \pm i\Theta\sin\varphi$ nur im Zähler enthalten.

Es ist also

$$(16)\qquad U_{\omega,k} \equiv W_{\omega,k} + \overline{W}_{\omega,k},$$

wobei

$$(17)\qquad W_{\omega,k} \equiv \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \left| \frac{d}{d\Theta}\left[\sqrt{\frac{\Theta}{\sin\Theta}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int \frac{dz\,e^{-\omega z}}{\omega^k(-z)^{k+1}} \frac{\sin(\frac{1}{2}\Theta\sin\varphi)(1+e^{-z}}{z+i\Theta\sin\varphi}\right.\right.$$

und $\overline{W}_{\omega,k}$ genau so gebaut ist wie der erste Summand, aber im Nen
$z - i\Theta\sin\varphi$ enthält.

Dabei darf man den Schleifenweg wieder von $+\infty$ nach $+\infty$ nehm
wodurch der Ausdruck nur um eine endliche Größe geändert wird.

Zur weiteren Abschätzung von $W_{\omega,k}$ entwickeln wir $\sqrt{\frac{\Theta}{\sin\Theta}}\sin\left(\frac{1}{2}\Theta\sin\right.$
nach Potenzen von Θ. Bei denjenigen Gliedern, welche zum mindes
den Faktor $\Theta^2\sin\varphi$ enthalten, setzen wir

$$(18)\qquad \omega z = u\Theta\sin\varphi;$$

dann erhält man, wenn $R(\Theta, \varphi)$ eine endliche, dem absoluten Betrage n
unterhalb einer festen Grenze liegende Funktion bedeutet, für diesen

$$(19)\qquad \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \left| \frac{d}{d\Theta}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int \frac{du\,e^{-u\Theta\sin\varphi}(1+e^{-\frac{u}{\omega}\Theta\sin\varphi})R(\Theta,\varphi)\Theta^{1-k}}{(-u)^{k+1}(\sin\varphi)^k\left(i+\frac{u}{\omega}\right)}\right]\right|.$$

ieser Ausdruck bleibt, da $k<1$, bestimmt unterhalb einer endlichen renze, wie man sich durch direktes Ausdifferenzieren nach Θ überzeugt, enn man berücksichtigt, daß $|u\,\Theta\sin\varphi\,e^{-u\Theta\sin\varphi}|$ für alle Werte von , Θ, φ, die in Betracht kommen, unterhalb einer festen Grenze bleibt. s bleibt also nur mehr

$$20)\qquad \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \left| \frac{d}{d\Theta}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int \frac{dz\,e^{-\omega z}}{\omega^k(-z)^{k+1}}\,\frac{\Theta\sin\varphi\,(1+e^{-z})}{z+i\,\Theta\sin\varphi}\right]\right|$$

u untersuchen. Wir ersetzen im Zähler $\Theta\sin\varphi$ durch $-i(z+i\,\Theta\sin\varphi)+iz$, ann ist noch

$$21)\qquad \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \left| \frac{d}{d\Theta}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int \frac{dz\,e^{-\omega z}}{\omega^k(-z)^{k}}\,\frac{(1+e^{-z})}{z+i\,\Theta\sin\varphi}\right]\right|$$

bzuschätzen, da für das andere Glied $z+i\,\Theta\sin\varphi$ im Nenner wegfällt. Wir setzen

$$22)\qquad \omega\,\Theta=\tau,\quad \omega z=u\sin\varphi,$$

ann erhält man statt (21)

$$23)\qquad \int_{\frac{\omega}{n}}^{\omega\frac{\pi}{2}} d\tau \left| \frac{d}{d\tau}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int \frac{du\,e^{-u\sin\varphi}\,(1+e^{-\frac{u\sin\varphi}{\omega}})}{(-u)^k(\sin\varphi)^k(u+i\,\tau)}\right]\right|.$$

Der Integrationsweg in der u-Ebene verläuft dabei etwa von ∞ bis $\frac{1}{2}$ ängs der Achse des Reellen, beschreibt dann einen Kreis mit dem Nullunkt als Mittelpunkt und geht in das Unendliche zurück. Wir führen ie Differentiation nach τ aus, dann erhält man in dem Nenner $(u+i\,\tau)^2$, o daß der absolute Betrag des Teiles von (23) für den $|u|<1$, sicher ndlich ist. Ist $|u|>1$, so ist es reell und

$$24)\qquad \frac{1}{|(u+i\tau)^2|}=\frac{1}{u^2+\tau^2}.$$

Führen wir für diesen Teil, was erlaubt ist, zunächst die Integration nach aus, so erhält man einen Ausdruck der Form

$$(25)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^{\infty} \frac{du\, e^{-u\sin\varphi}\left(1+e^{-\frac{u\sin\varphi}{\omega}}\right)}{(\sin\varphi)^k u^{k+1}} \cdot \left[\operatorname{arc\,tg}\frac{\tau}{u}\right]_{\frac{\omega}{\pi}}^{\frac{\omega\pi}{2}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^{\infty} \frac{du\, e^{-u\sin\varphi}\left(1+e^{-\frac{u\sin\varphi}{\omega}}\right)}{(\sin\varphi)^k u^{k+1}} \equiv 1.$$

Es bleibt also $U_{\omega,k}$ stets unterhalb einer festen endlichen Größe[6]).

§ 3.

Ableitung eines Hilfssatzes. Ansatz zur Abschätzung von $V_{\omega,k}$.

Wir brauchen im folgenden Integrale der Form

$$(26)\quad J = \int_a^b \frac{\sin(\tau\sin\varphi)}{(\sin\varphi)^r} d\varphi, \quad \text{wenn} \quad 0 \leqq a < b \leqq \frac{\pi}{2},\ \tau > 0,\ r \leqq \frac{1}{2} \text{ ist.}$$

Wir wollen zeigen, daß, wenn M eine von τ unabhängige Konstante,

$$(27)\qquad |J| < \frac{M}{\sqrt{\tau}}.$$

Wir setzen

$$(28)\qquad \sin\varphi = z,$$

dann ist

$$(29)\qquad J = \int_c^d \frac{\sin\tau z\, dz}{z^r\sqrt{1-z^2}} = \int_c^d \frac{e^{i\tau z} - e^{-i\tau z}}{2iz^r\sqrt{1-z^2}} dz, \quad \text{wo} \quad 0 \leqq c < d \leqq 1.$$

Es genügt, wenn wir

$$(30)\qquad J_1 = \int_c^d \frac{e^{i\tau z}}{z^r\sqrt{1-z^2}} dz$$

allein untersuchen. Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist

$$(31)\quad J_1 = \int_c^{c+\infty i} - \int_d^{d+\infty i} = e^{ci\tau} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\tau\xi} i\, d\xi}{(c+i\xi)^r\sqrt{1-c^2-2ci\xi+\xi^2}} - e^{di\tau} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\tau\xi} i\, d\xi}{(d+i\xi)^r\sqrt{1-d^2-2}}$$

$$= e^{ci\tau} i J_2 - e^{di\tau} i J_3.$$

---

[6]) Bei der Abschätzung des Integrals $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{1}{n}}$ in (2) hat man in dem $U_{\omega,k}$ entsprechenden Ausdruck nur $\omega z = u$ zu setzen.

Setzt man $\tau\xi = \zeta$, so wird

32) $$J_2 = \frac{1}{\tau}\int_0^{\infty} \frac{e^{-\zeta}d\zeta}{\left(c+\frac{i\zeta}{\tau}\right)^r \sqrt{1-c^2-2c\frac{i\zeta}{\tau}+\frac{\zeta^2}{\tau^2}}}.$$

Ist $c = 0$, so verhält sich der erste Faktor im Nenner wie $\frac{\zeta^r}{\tau^r}$, in dem anderen Falle ist sein absoluter Betrag größer, ist $c = 1$, so verhält sich der absolute Betrag des zweiten Faktors wie $\sqrt{\frac{\zeta}{\tau}}$, in jedem anderen Falle ist er größer. Da $r \leqq \frac{1}{2}$, so gilt also

33) $$|J_2| < \frac{M}{\sqrt{\tau}}.$$

Dasselbe gilt bei geeigneter Wahl von M für $|J_3|$ und damit für J_1, so daß, wenn M eine von Fall zu Fall wechselnde, in jedem Falle aber feste Größe bedeutet.

34) $$|J_1| < \frac{M}{\sqrt{\tau}},$$

woraus unmittelbar (27) folgt.

Wir beginnen jetzt mit der Abschätzung von $V_{\omega,k}$ und betrachten den Teil der Schleife, für den $|z| > 1$, also z reell ist. Dann bleiben alle Teile der rechten Seite von (13) unterhalb einer endlichen Größe außer denen, die aus der Differentiation von $\sin((n+\frac{3}{2})\,\Theta\sin\varphi)$ und von $\cos((n+\frac{1}{2})\,\Theta\sin\varphi)$ nach Θ entstehen, da in diesem Falle der Faktor n im Zähler auftritt. Es genügt nach Division des Zählers und Nenners durch e^{2z}, wenn wir den von dem einen dieser Glieder herrührenden Teil abschätzen, also

$$K = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \left| \sqrt{\frac{\Theta}{\sin\Theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int \frac{dz\, e^{(-\omega+n)z}}{\omega^k (-z)^{k+1}} \frac{\sin(\Theta\sin\varphi)\,(n+\frac{1}{2})\sin\varphi\cos((n+\frac{1}{2})\,\Theta\sin\varphi)}{e^{-2z}-2e^{-z}\cos(\Theta\sin\varphi)+1} \right|.$$

Nun nimmt $\frac{1}{e^{-2z}-2e^{-z}\cos(\Theta\sin\varphi)+1}$ mit wachsendem Θ ab, also ist nach dem zweiten Mittelwertsatz und (27)

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\Theta\sin\varphi)\sin\varphi\cos((n+\frac{1}{2})\,\Theta\sin\varphi)}{e^{-2z}-2e^{-z}\cos(\Theta\sin\varphi)+1}\, d\varphi \right|$$

$$= \frac{1^{\bullet}}{2(1-e^{-z})^2} \left| \int_0^{h} \sin\varphi\,[\sin((n+\tfrac{3}{2})\,\Theta\sin\varphi) - \sin((n-\tfrac{1}{2})\,\Theta\sin\varphi)]\,d\varphi \right| < \frac{M}{\sqrt{n\Theta}}.$$

Ist also $k \geqq \frac{1}{2}$, so wird der Faktor $(n+\frac{1}{2})$ im Zähler von K dur den Faktor $\omega^k n^{\frac{1}{2}}$ im Nenner kompensiert; da ferner der Integrand $\Theta = 0$ nur wie $\frac{1}{\sqrt{\Theta}}$ unendlich wird, so bleibt K unterhalb einer fest Grenze. Es bleibt also nur mehr derjenige Teil von $V_{\omega,k}$ zu untersuch der von dem zwischen $+1$ und $+1$ liegenden Teil des Schleifenintegr herrührt. Um nun den von der Ableitung des Nenners nach Θ herri renden Bestandteil abzuschätzen, gehen wir von (14) und (15) aus u betrachten

$$(37)\quad L = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \left| \sqrt{\frac{\Theta}{\sin\Theta}} \right| \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int dz \frac{e^{(n+1-\omega)z}}{\omega^k (-z)^{k+1}} \frac{[\sin((n+\frac{1}{2})\Theta\sin\varphi) - e^{-z}\sin((n+\frac{3}{2})\Theta\sin}{(z \pm i\Theta\sin\varphi)^2}$$

Wir setzen

$$(38)\qquad e^{-z} = 1 - z\frac{1-e^{-z}}{z};$$

$$L_1 = 2\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \left| \sqrt{\frac{\Theta}{\sin\Theta}} \right| \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int dz \frac{e^{(n+1-\omega)z}}{\omega^k (-z)^{k+1}} \frac{\sin\left(\frac{\Theta}{2}\sin\varphi\right)\cos((n+1)\Theta\sin\varphi)}{(z \pm i\Theta\sin\varphi)^2}$$

(39)

$$L_2 = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \left| \sqrt{\frac{\Theta}{\sin\Theta}} \right| \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int dz \frac{e^{(n+1-\omega)z}}{\omega^k (-z)^k} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\Theta\sin\varphi)\sin\varphi}{(z \pm i\Theta\sin\varphi)^2} \frac{1-e^{-z}}{z}$$

Also ist

$$(40)\qquad L_1 < M\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int |dz| \frac{\Theta\sin^2\varphi}{\omega^k |z|^{k+1} |z \pm i\Theta\sin\varphi|^2};$$

$$L_2 < M\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int \frac{|dz|\sin\varphi}{\omega^k |z|^k |z \pm i\Theta\sin\varphi|^2}.$$

In beiden Ausdrücken kann man nun nachträglich wieder die Schleif wege in das Unendliche erstrecken, da dadurch nur Ausdrücke hin kommen, die unterhalb einer endlichen Grenze liegen.

Setzt man

$$(41)\qquad z = u\Theta\sin\varphi,$$

wird

$$L_1 < M \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int \frac{|du|}{\omega^k |u|^{k+1} \Theta^{k+1} (\sin \varphi)^k |u \pm i|^2}, \tag{42}$$

$$L_2 < M \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int \frac{|du|}{\omega^k |u|^k \Theta^{k+1} (\sin \varphi)^k |u \pm i|^2}$$

abei sind die Schleifenwege etwa aus den Achsen des Reellen zwischen $+\infty$ und $+\frac{1}{2}$ und dem Kreise vom Radius $\frac{1}{2}$ um den Nullpunkt zuammenzusetzen. Da

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Theta}{\omega^k \Theta^{k+1}} \equiv \frac{n^k}{k\omega^k} \equiv 1 \tag{43}$$

st, wenn $0 < k$, so liegen L_1 und L_2 und damit L unterhalb endlichen Grenzen. Genau so behandelt man die Glieder, die durch Differentiation von $\sqrt{\frac{\Theta}{\sin \Theta}} \sin(\Theta \sin \varphi)$ entstehen[7]).

§ 4.

Fortsetzung der Abschätzung von $V_{\omega,k}$.

Wir haben also nur noch diejenigen Glieder von $V_{\omega,k}$ abzuschätzen, bei denen durch die Differentiation im Zähler der Faktor n auftritt, während der Schleifenweg von $+1$ nach $+1$ zu nehmen ist. Vermittelst der Partialbruchzerlegung (14) zerfällt in dem zu untersuchenden Ausdruck die zwischen den Absolutstrichen stehende Größe in die Summe von zwei konjugiert komplexen Ausdrücken, von denen also nur der eine zu untersuchen ist. Wir betrachten also

$$N = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \left| \sqrt{\frac{\Theta}{\sin \Theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int dz \frac{e^{az} n \sin \varphi}{\omega^k (-z)^{k+1}} \frac{[\cos((n+\frac{1}{2})\Theta \sin\varphi) - e^{-z} \cos((n+\frac{3}{2})\Theta \sin\varphi)]}{(1 - e^{i\Theta \sin\varphi + z})} \right|$$

[7]) Bei der entsprechenden Abschätznng von $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \frac{1}{n}}$ in (2) hat man zunächst wörtlich so vorzugehen bis zu (36); für die andern bisher betrachteten Bestandteile folgt von selbst, daß sie endlich blieben.

Dabei ist $\alpha = n + 1 - \omega$. Die nicht angeschriebenen Glieder, d
statt des Faktors n den Faktor $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{3}{2}$ haben, werden wie die en
sprechenden Ausdrücke in § 3 behandelt. Wir setzen nun in (44)

$$e^{\alpha z} = e^{-\alpha i \Theta \sin\varphi}\left[1 - (1 - e^{\alpha(z + i\Theta\sin\varphi)})\right]. \tag{45}$$

Da nun

$$\frac{1 - e^{\alpha(z + i\Theta\sin\varphi)}}{1 - e^{i\Theta\sin\varphi + z}} = f(\Theta, z, \varphi) \tag{46}$$

für alle in Betracht kommenden Werte Θ, z und φ einen reellen ur
imaginären Teil besitzt, der in bezug auf φ von beschränkter Schwankur
ist, so können wir auf den von $f(\Theta, z, \varphi)$ herrührenden Bestandteil de
zweiten Mittelwertsatz und (27) anwenden, woraus folgt, daß sein abs
luter Betrag für $k \geqq \frac{1}{2}$ unterhalb einer endlichen Grenze bleibt. W
dürfen in N daher $e^{\alpha z}$ durch $e^{-\alpha i\Theta\sin\varphi}$ und ebenso e^{-z} durch $e^{+i\Theta\sin\varphi}$ e
setzen. Ebenso dürfen wir, wenn

$$\frac{1}{1 - e^{i\Theta\sin\varphi + z}} = \frac{-1}{i\Theta\sin\varphi + z} + g(\Theta, z, \varphi), \tag{47}$$

den von $g(\Theta, z, \varphi)$ herrührenden Bestandteil weglassen. Es ist also

$$N \equiv \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{4}} d\Theta \left| \sqrt{\frac{\Theta}{\sin\Theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int dz \frac{e^{-\alpha i\Theta\sin\varphi}\, n \sin\varphi \left[\cos((n+\frac{1}{2})\Theta\sin\varphi - e^{i\Theta\sin\varphi}\cos((n+\right.}{\omega^k (-z)^{k+1}} \right. \tag{48}$$
$$\left. \frac{}{i\Theta\sin\varphi + z} \right.$$

und nach (41)

$$N \equiv \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} a\Theta \left| \sqrt{\frac{\Theta}{\sin\Theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int \frac{du\, e^{-\alpha i\Theta\sin\varphi}}{\omega^k (-u)^{k+1}} n \frac{\left[\cos((n+\frac{1}{2})\Theta\sin\varphi) - e^{i\Theta\sin\varphi}\cos((n+\frac{3}{2}\right.}{\Theta^{k+1}(\sin\varphi)^k (u+i)} \right. \tag{49}$$

Dabei wurde in (48) der Integrationsweg wieder von $+\infty$ nach $+$ c
genommen, da genau wie in (36) folgt, daß sich N dadurch nur um ei
endliche Größe ändert.

Nun ist

$$e^{i\Theta\sin\varphi} = 1 + i\Theta\sin\varphi + \Theta^2\sin^2\varphi\, g_1(\Theta, \varphi), \tag{50}$$

$$\cos((n + \tfrac{1}{2})\Theta\sin\varphi) - \cos((n + \tfrac{3}{2})\Theta\sin\varphi)$$
$$= \sin((n+1)\Theta\sin\varphi)\left[\Theta\sin\varphi + \Theta^3\sin^3\varphi\, g_2(\Theta, \varphi)\right.$$

$$i\Theta \sin\varphi \cos\left((n+\tfrac{3}{2})\,\Theta\sin\varphi\right)$$
$$= \cos\left((n+1)\,\Theta\sin\varphi\right)\left[i\Theta\sin\varphi + \Theta^3(\sin\varphi)^3 g_3(\Theta,\varphi)\right]$$
$$+ \sin\left((n+1)\,\Theta\sin\varphi\right)\Theta^2\sin^2\varphi\, g_4(\Theta,\varphi).$$

Es ist also, wenn

(51) $$P = P_1 + P_2 = e^{-\alpha i\Theta\sin\varphi}\left[\cos\left((n+\tfrac{1}{2})\,\Theta\sin\varphi\right)\right.$$
$$\left. - e^{i\Theta\sin\varphi}\cos\left((n+\tfrac{3}{2})\,\Theta\sin\varphi\right)\right]$$

ist,

$$P_1 = -i\Theta\sin\varphi\, e^{i(n+1)\,\Theta\sin\varphi}$$
$$P_2 = \Theta^2\sin^2\varphi\left[\sin\left((n+1)\,\Theta\sin\varphi\right)h_1(\Theta,\varphi) + \cos\left((n+1)\,\Theta\sin\varphi\right)h_2(\Theta,\varphi)\right].$$

Dabei ist der reelle und imaginäre Teil der durch (50) und (52) definierten Funktionen g und h von beschränkter Schwankung. Der zweite Mittelwertsatz zeigt dann vermittelst (27), daß P_2 zu N nur einen endlichen Beitrag liefert. Es ist also

(53) $$N \equiv \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \left| \sqrt{\frac{\Theta}{\sin\Theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int \frac{du\, n\Theta\sin\varphi\, e^{i(n+1)\,\Theta\sin\varphi}}{\omega^k(-u)^{k+1}(\sin\varphi)^k\Theta^{k+1}(u+i)} \right|.$$

Nun ist entsprechend (33)

(54) $$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi)^{1-k} e^{i(n+1)\,\Theta\sin\varphi}\, d\varphi < \frac{M}{\sqrt{(n+1)\,\Theta}} \right|,$$

also

(55) $$N \equiv \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \sqrt{\frac{\Theta}{\sin\Theta}} \frac{\sqrt{n}}{\omega^k\Theta^{k+\frac{1}{2}}} \equiv \frac{n^k}{\omega^k} \equiv 1, \text{ wenn } k > \tfrac{1}{2}.$$

Damit ist gezeigt[8]*, daß für jedes noch so große ω $S_{\omega,k}$ unterhalb einer endlichen Grenze bleibt, wenn $k > \frac{1}{2}$.*

[8]) Die entsprechende Abschätzung für das Integral $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \frac{1}{n}}$ in (2) folgt unmittelbar aus dem zweiten Mittelwertsatz und (27), wie oben bei dem von $f(\Theta, z, \varphi)$ herrührenden Teil, wobei $f(\Theta, z, \varphi)$ durch (46) definiert war.

Ist $k = \frac{1}{2}$, so bleiben alle Bestandteile endlich außer

$$P = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \left| \sqrt{\frac{\Theta}{\sin\Theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi R(\Theta, \varphi) \right|,$$

wobei $R(\Theta, \varphi)$ entsprechend den Bemerkungen von (14) der reelle Teil vo

$$\int \frac{du n e^{i(n+1)\Theta \sin\varphi} (\sin\varphi)^{\frac{1}{2}}}{\omega^{\frac{1}{2}} (-u)^{\frac{1}{2}} \Theta^{\frac{1}{2}} (u+i)}$$

ist, und man sieht vermittelst der (34) entsprechenden Gleichung, daß mit n wie ln n unendlich wird.

(Eingegangen am 17. November 1919.)

Einfache Kennzeichen polarer Korrelationen.

Von

Stanislaus Jolles in Berlin.

Entsprechen in zwei kollokalen korrelativen ebenen Feldern η, η_1 den Ecken eines Dreiecks von η in η_1 die Gegenseiten[1]) oder in zwei korrelativen Räumen Σ, Σ_1 den Ecken eines Tetraeders von Σ in Σ_1 die Gegenebenen[2]), so sind die Korrelationen bekanntlich polar. Diese in der synthetischen Geometrie fast ausschließlich benutzten v. Staudtschen Kriterien geben manchem Beweise ein gekünsteltes Gepräge. Es empfiehlt sich daher noch andere einfache Bedingungen abzuleiten, mit deren Hilfe eine Korrelation in der Ebene oder im Raume als polar erkannt werden kann.

1. In zwei kollokalen korrelativen ebenen Feldern η, η_1 mögen die Punktreihen a, r, y auf den Seiten eines Dreiecks von η zu den ihnen entsprechenden Strahlenbüscheln A_1, R_1, Y_1 von η_1 involutorisch sein. Dann sind auch die bzw. mit den Punktreihen a, r, y identischen Punktreihen b_1, s_1, z_1 von η_1 involutorisch zu den ihnen entsprechenden Strahlenbüscheln B, S, Z von η. Die den Trägern der Punktreihen ab_1 und rs_1 in η_1 und η entsprechenden Punkte A_1, B und R_1, S liegen auf einer dem gemeinsamen Punkte von ab_1 und rs_1 doppelt entsprechenden Gerade; gleiches gilt von den Punkten Y_1, Z, die dem Träger der Punktreihe yz_1 entsprechen, und den Punkten A_1, B. Die Punkte A_1, B können aber nur dann mit den Punkten R_1, S bzw. Y_1, Z auf je einer Gerade liegen, wenn sie zusammenfallen. In diesem Falle bilden die beiden von ihnen ausstrahlenden projektiven Büschel, die der Punktreihe ab_1 bzw. in η_1 und η zugewiesen sind, eine Strahleninvolution. Das Feld η enthält also Dreiecke, deren Ecken in η_1 ihre Gegenseiten entsprechen, und die korrelativen Felder bilden folglich ein polares Feld[1]). Kurz:

---

[1]) v. Staudt, Geometrie der Lage, 1846. Nr. 234.

[2]) v. Staudt, a. a. O., Nr. 326.

Zwei korrelative ebene Felder η, η_1 bilden ein polares Feld, wenn die Punktreihen a, r, y auf den drei Seiten eines Dreiecks von η zu den ihnen entsprechenden Strahlenbüscheln A_1, R_1, Y_1 von η_1 involutorisch liegen, die Seiten aber nicht die ihnen entsprechenden Punkte enthalten.

2. *Die Korrelation zweier korrelativen Felder η, η_1 ist polar, wenn in ihnen den Punkten A, B die Strahlen a, b doppelt entsprechen, aber weder A mit a noch B mit b inzident ist.*

Dem Punkte $ab = C$ entspricht nämlich doppelt der Strahl $AB = c$, dem Punkte $ac = D$ der Strahl $AC = d$. Im Dreiecke ACD entsprechen sonach die Ecken doppelt ihren Gegenseiten, und die Korrelation von η, η_1 ist somit wiederum polar [1]).

3. *Zwei korrelative Räume Σ, Σ_1 bilden einen polaren Raum, wenn die Felder η, ϱ, o der Ebenen eines Dreiflachs von Σ zu den ihnen entsprechenden zentrischen Bündeln E_1, R_1, O_1 von Σ_1 involutorisch liegen, die Ebenen aber nicht die ihnen entsprechenden Punkte von Σ_1 enthalten.*

Die mit den drei Feldern η, ϱ, o bzw. identischen Felder $\varphi_1, \sigma_1, \pi_1$ von Σ_1 sind zunächst ebenfalls involutorisch zu den ihnen entsprechenden zentrischen Bündeln F, S, P von Σ. Ferner sind die den Ebenen des Felder $\eta\varphi_1$ und $\varrho\sigma_1$ entsprechenden Punkte E_1, F und R_1, S mit der Gerade inzident, die dem gemeinsamen Strahle beider Ebenen doppelt entspricht. Gleiches gilt von den Punkten O_1, P, die dem Träger des Feldes $o\pi_1$ entsprechen, und den Punkten E_1, F. Das ist aber nur möglich, wenn die Punkte E_1, F zusammenfallen, also die dann von diesen Punkte ausstrahlenden korrelativen Bündel, die dem Felde $o\pi_1$ bzw. in Σ_1 und Σ zugewiesen sind, einen polaren Bündel bilden. Im Raume Σ liegen also Tetraeder, deren Ecken in Σ_1 ihre Gegenebenen entsprechen; die korrelativen Räume Σ, Σ_1 bilden somit einen polaren Raum [2]).

4. *Zwei korrelative Räume Σ, Σ_1 bilden einen polaren Raum, wenn die Träger a, b, c, d, e, f von sechs Punktreihen erster Ordnung, die zu den ihnen entsprechenden Ebenenbüscheln in Σ nnd Σ_1 involutorisch liegen, nicht Strahlen eines linearen Komplexes sind* [3]).

Die fünf Strahlen a, b, c, d, e bestimmen den linearen Komplex Γ_e, die fünf Strahlen a, b, c, d, f den linearen Komplex Γ_f. Jeder Strahl dieser Komplexe ist der Träger einer Punktreihe, die zu den ihr entsprechenden Ebenenbüscheln in Σ und Σ_1 involutorisch liegt [4]). Es seien nun η, ϱ, o die drei Ebenen eines Dreiflachs; sie sollen, wenn Γ_e und Γ_f

[3]) R. Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften 3, Leipzig u. Berlin 1909, Nr. 567.

[4]) R. Sturm, Über die reziproke und mit ihr zusammenhängende Verwandtschaften, Math. Annalen 19 (1882), Nr. 17.

ich in einer hyperbolischen linearen Kongruenz schneiden, keine Leitgerade der Kongruenz enthalten. Dann enthält jede der drei Ebenen wei aus Komplexstrahlen bestehende Büschel erster Ordnung und also uch Dreiecke, auf deren Seiten Punktreihen liegen, die zu den ihnen entprechenden Ebenenbüscheln von Σ und Σ_1 involutorisch sind. Folglich iegen die ebenen Felder von η, ϱ, o zu den ihnen in Σ und Σ_1 entsprechenen zentrischen Bündeln involutorisch (1.), und die Korrelation von Σ, Σ_1 st polar (3.).

5. Entsprechen in zwei korrelativen Räumen Σ, Σ_1 zwei windschiefe Geraden a, b einander doppelt, so tragen alle mit a, b inzidenten Geraden Punktreihen, die zu den ihnen entsprechenden Ebenenbüscheln von Σ und Σ_1 nvolutorisch liegen. Das gleiche gilt von zwei anderen windschiefen Geaden c, d, die ebenfalls in Σ, Σ_1 einander doppelt entsprechen mögen. iegen a, b, c, d nicht in einer Regelschar zweiter Ordnung, so können ie Strahlen c, d nicht durch denselben linearen Komplex einander zuordnet werden, wie die Strahlen a, b [5]). Drei mit a, b inzidente Strahlen iegen also niemals mit drei c, d schneidenden Strahlen im selben linearen Komplexe; die zwischen Σ, Σ_1 bestehende Korrelation ist folglich polar 4.). Somit schließen wir:

Liegen vier windschiefe Strahlen a, b, c, d auf keiner Fläche zweiten Grades, und entsprechen sowohl a, b wie c, d einander doppelt in zwei korrelativen Räumen, so ist die Korrelation der Räume polar.

6. Den in 5. abgeleiteten Satz sandte mir Reye am 22. April 1919, en zugehörigen Beweis einige Wochen später. Reyes Beweis ist von em soeben gegebenen durchaus verschieden; er lautet — abgesehen von Umstellungen und notwendigen Änderungen, für die ich verantwortlich in — wie folgt:

Sind von den vier windschiefen Strahlen a, a_1, b, b_1, die nicht in einer Regelschar zweiter Ordnung liegen, a, a_1 und b, b_1 reziproke Polaren eines polaren Raumes Π, so ist Π bestimmt, wenn einer Ebene η von a ein Punkt E von a_1 als Pol zugeordnet wird.

Ist nämlich die Gerade g mit η nd b, b_1 inzident und die Gerade g_1 it E und b, b_1 (Fig. 1), dann kann, eil nach der Voraussetzung a, a_1, b, b_1 icht in einer Regelschar zweiter Ord-

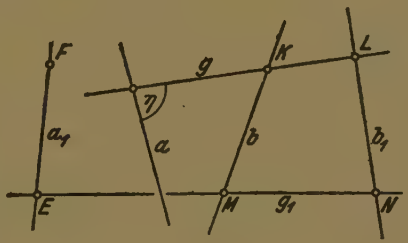


Fig. 1.

[5]) Möbius, Über eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im aume, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **10** (1833), Nr. 18.

nung liegen, g nicht a_1 und g_1 nicht a schneiden. g geht also nicht durc den Punkt $a_1\eta = F$, und g_1 liegt nicht in der Ebene $aE = \varphi$. Wird den nach das Tetraeder $KLMN$, von dem b, b_1 und g, g_1 zwei Paar Gege kanten sind, zum Polartetraeder eines polaren Raumes Π gewählt, ur in Π der Ebene φ der Pol F zugeordnet, so ist Π bestimmt [6]). In Π ab ist der Schnittpunkt E von φ mit g_1 der Pol der Verbindungsebene von F mit g. Die Geraden $EF = a_1$ und $\eta\varphi = a$ sind folglich reziprok Polaren; ebenso die Geraden b, b_1 als Gegenkanten des Polartetraede $KLMN$, w. z. b. w.

Der polare Raum Π ist nach unserm Beweise auch durch die dr Paare reziproker Polaren a, a_1; b, b_1; g, g_1 bestimmt. Mit der Lage d Poles E auf a_1 ändert sich der polare Raum Π. Es gibt also ∞^1 pola Räume, in denen a, a_1 und b, b_1 zwei Paare reziproker Polaren sin Fällt Π nacheinander mit diesen ∞^1 polaren Räumen zusammen, so b schreibt g_1 die Leitschar der Regelschar $b_1 b a_1$. Die ∞^1 polaren Räu haben nicht nur die beiden Paare a, a_1 und b, b_1 reziproker Polaren g mein, sondern ∞^2 Paare. Denn je zwei homologe Strahlen u^a, u_1^a; v^a, v_1^a; der projektiven Regelscharen zweiter Ordnung $a a_1 b$ und $a_1 a b_1$ bild ein solches Paar reziproker Polaren, ebenso je zwei homologe Strahl x^b, x_1^b; y^b, y_1^b; ... der projektiven Regelscharen $b b_1 a$ und $b_1 b a_1$. ferner s ein Strahl der linearen Kongruenz $a b a_1 b_1$, der nicht in den Reg scharen $a a_1 b$ und $b b_1 a$ enthalten ist, so liegt der ihm in Π zugeordn Strahl s_1 nicht in den Regelscharen $a_1 a b_1$ und $b_1 b a_1$. Wir verbinde mit den gegebenen Strahlen u^a von $a a_1 b$ und x^b von $b b_1 a$ durch Regelschar zweiter Ordnung $s u^a x^b$. Sie liegt in der Kongruenz $a b a_1$ da sie durch drei Kongruenzstrahlen geht, und enthält folglich noch ein Strahl v^a von $a a_1 b$ und einen Strahl y^b von $b b_1 a$. In der ihr in Π geordneten Regelschar $s_1 u_1^a x_1^b$ liegen somit die Strahlen v_1^a und y_1^b. durch die vier Kongruenzstrahlen u_1^a, x_1^b, v_1^a, y_1^b gehende Regelschar $s_1 u_1^a$ besteht demnach aus lauter Strahlen der Kongruenz $a b a_1 b_1$, insbesond ist s_1 ein Kongruenzstrahl. Da aber u^a, u_1^a; v^a, v_1^a; x^b, x_1^b drei Paare meinsamer reziproker Polaren der ∞^1 polaren Räume sind, so sind projektiven Regelscharen $s u^a x^b$ und $s_1 u_1^a x_1^b$ in diesen Räumen einan zugeordnet. s, s_1 sind also reziproke Polaren dieser Räume, und *die Strahlen der linearen Kongruenz $a b a_1 b_1$ sind folglich paarweise in ∞^1 polaren Räumen zueinander polar.*

Gibt es außer den ∞^1 polaren Räumen, welche die reziproken Pola a, a_1 und b, b_1 enthalten, noch andere korrelative Räume, in den sow a, a_1 wie auch b, b_1 einander doppelt entsprechen?

---

[6]) v. Staudt, Geometrie der Lage 1847, Nr. 327.

Analog wie eben läßt sich nachweisen, daß in zwei solchen korrelativen Räumen Σ, Σ_1 die Strahlen der linearen Kongruenz $a b a_1 b_1$ paarweise einander doppelt entsprechen. Entspricht ferner einem Leitstrahle g der Regelschar zweiter Ordnung $b b_1 a$ von Σ_1 der Leitstrahl g_1 der Regelschar zweiter Ordnung $b_1 b a_1$, so ist, wie schon gezeigt wurde, einer unter den ∞^1 polaren Räumen bestimmt, in dem g, g_1 reziprok polar sind. In Σ, Σ_1 wie in diesem polaren Raume Π entsprechen den Punkten $gb, gb_1, ga, \ldots$ von g die Ebenen $g_1 b_1, g_1 b, g_1 a_1, \ldots$ von g_1. Sind ferner s, s_1 zwei in Σ, Σ_1 einander doppelt entsprechende und in Π reziprok polare Strahlen der linearen Kongruenz $a b a_1 b_1$, so entsprechen in Σ, Σ_1 und in Π den Ebenen, die s mit den Punkten $gb, gb_1, ga, \ldots$ verbinden, die Schnittpunkte von s_1 mit den Ebenen $g_1 b_1, g_1 b, g_1 a_1, \ldots$ In Σ, Σ_1 und Π entspricht also dem Ebenenbüschel s dieselbe projektive Punktreihe auf s_1. Durchlaufen die einander doppelt entsprechenden Strahlen s, s_1 die Kongruenz $a b a_1 b_1$, so ist demnach sowohl durch die Korrelation von Σ, Σ_1 wie auch durch die polare Korrelation von Π jeder Ebene des Raumes in Σ_1 und Π stets derselbe Punkt zugeordnet, und die Korrelationen von Σ, Σ_1 und Π sind folglich identisch. Die Korrelation zweier korrelativen Räume ist also polar, wenn sie von vier windschiefen Strahlen a, a_1, b, b_1 sowohl a, a_1 wie auch b, b_1 miteinander vertauscht, und die vier Strahlen auf keiner Fläche zweiter Ordnung liegen.

Berlin-Halensee, den 19. November 1919.

(Eingegangen am 23. November 1919.)

Zu der Abhandlung von Herrn Roland Weitzenböck: „Über eine Ungleichung in der Dreiecksgeometrie“[1]).

Von

W. Fr. Meyer in Königsberg i. Pr.

1. Herr Weitzenböck geht von dem Satze aus: „Ist F der Flächeninhalt eines ebenen Dreiecks mit den Seiten a, b, c, so ist stets

$$\text{(I)} \qquad \frac{|F|}{a^2+b^2+c^2} \leqq \frac{1}{12}\sqrt{3},$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur bei gleichseitigen Dreiecken.“

Er gibt mehrere elementare Beweise dieses Satzes und macht sodann von ihm eine Reihe bemerkenswerter Anwendungen.

2. Die Ungleichung (I) habe ich in trigonometrischer Gestalt — zugleich unter Hinzufügung der unteren Grenze Null — angegeben im Enzyklopädieartikel III AB 9 „Elementargeometrie“ von M. Zacharias (ausgegeben am 13. August 1918), S. 974, Anm. 322a, unter Nr. (2). Ich habe mich dort mit dem Hinweise begnügt, daß die Doppelungleichung als eine direkte Folge der elementaren Grundtatsache (A) erscheint, „daß die durch ihr Verschwinden das Paar der imaginären Kreispunkte in Linienkoordinaten u_i bestimmende quadratische Form K als Summe zweier Quadrate darstellbar ist, so daß K für reelle Gerade (u) niemals negativ wird und den Wert Null nur für die unendlichferne Gerade g_∞ annimmt.“

Es wird sich empfehlen, hier einige Worte zur Erläuterung hinzuzufügen.

3. Ich bediene mich folgender Bezeichnungen. Es seien, für $i = i, k, l = 1, 2, 3$ die a_i die Seiten des Dreiecks, die α_i dessen Innenwinkel, $s_i = \sin\alpha_i$, $c_i = \cos\alpha_i$, $s_{kl} = \sin(\alpha_k - \alpha_l)$, $\pi_s = s_i s_k s_l$, $\pi_c = c_i c_k c_l$, endlich R der Radius des Umkreises.

[1]) Math. Zeitschr., 5 (1919), S. 137–146.

Es soll zuvörderst der Ausdruck $\frac{|F|}{\sum_i a_i^2}$ in trigonometrische Gestalt ngesetzt werden.

Da $a_i = 2Rs_i$, so ergibt sich einmal:

$$\sum_i a_i^2 = 4R^2 \sum_i s_i^2; \tag{1}$$

ndererseits, da $|F| = \frac{1}{2} a_i a_k s_l$:

$$|F| = 2R^2 \pi_s. \tag{2}$$

ie Division von (1) und (2) liefert daher:

$$\frac{|F|}{\sum_i a_i^2} = \frac{1}{2} \frac{\pi_s}{\sum_i s_i^2}. \tag{3a}$$

Mit Rücksicht auf die Identität:

$$\sum_i s_i^2 = 2(1 + \pi_c) \tag{4}$$

ißt sich der Relation (3a) auch die für Anwendungen zumeist zweckäßigere Form erteilen:

$$\frac{|F|}{\sum_i a_i^2} = \frac{1}{4} \frac{\pi_s}{1 + \pi_c}. \tag{3b}$$

Nun lautet meine Doppelungleichung (l. c.):

$$0 < \frac{\pi_s}{1 + \pi_c} \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}, \tag{I'}$$

o das rechtsstehende Gleichheitszeichen (Fall des Maximums) nur für in gleichseitiges Dreieck gilt, und die untere Grenze Null nur für ein neigentliches (zusammengeklapptes) Dreieck, wo irgendein Winkel α_i gegen inen gestreckten konvergiert.

Auf Grund von (3b) geht der rechte Teil der Doppelungleichung (I') nmittelbar über in (I); überdies tritt in (I) die Null als untere Grenze inzu.

4. Nunmehr soll (I') direkt aus der Grundtatsache (A) hergeleitet erden. Bei Zugrundelegung des Dreiecks als Koordinatendreieck lautet ie Kreispunkteform K:

$$K(u) \equiv u_i^2 + u_k^2 + u_l^2 - 2u_i u_k c_l - 2u_i u_l c_k - 2u_k u_l c_i, \tag{5}$$

nd es gilt für jede reelle Gerade (u):

$$K(u) \geqq 0, \tag{6}$$

o das Gleichheitszeichen nur für die $g_\infty(s_i)$ erfüllt ist.

Man setze für die u_i einmal die Werte c_i ein, so kommt:

$$K(c_i) \equiv \sum_i c_i^2 - 6\pi_c \geqq 0, \tag{7}$$

oder auch mit Rücksicht auf die Identität (4) — die damit gleichwert ist, daß die Determinante von $K(u)$ verschwindet — die Doppelungleichu [l. c. Formel (1)]:

$$0 < 1 + \pi_c \leqq \tfrac{9}{8}. \tag{8}$$

Das rechterhand in (7), oder auch in (8), auftretende Gleichhei zeichen gilt nur, wenn die c_i den s_i proportional sind, d. i. für ein gleic seitiges Dreieck; gegen die untere Grenze Null konvergiert $1 + \pi_c$ n dann, wenn irgendeiner der drei Faktoren c_i von π_c gegen -1 konv giert, die beiden andern gegen $+1$, d. h. wenn das Dreieck in ein u eigentliches ausartet.

Andererseits wähle man in (6) die u_i gleich den $s_{kl} = \sin(\alpha_k -$ $(i, k, l$ zyklisch zu nehmen), so ergibt sich:

$$K(s_{kl}) \equiv 4\{(1 + \pi_c)^2 - 3\pi_s^2\} \geqq 0, \tag{9}$$

und damit die rechte Seite der Doppelungleichung (I′).

Das Gleichheitszeichen rechts in (9), wie in (I′), tritt offenbar ei wenn die $s_{kl} = s_k c_l - s_l c_k$ verschwinden, d. i. wieder für ein gleichseitig Dreieck. Aber auch nur dann. Denn der Ansatz $s_k c_l - s_l c_k = \varrho s_i$ füh nach Elimination der s zur Bedingungsgleichung: $\varrho\left\{\varrho^2 + \sum_i c_i^2\right\} = 0$, der einzige reelle Lösung in ϱ eben $\varrho = 0$ ist.

Zur unteren Grenze Null von $\frac{\pi_s}{1+\pi_c}$ in (I′) gelangt man ohne weiter wenn man $1 + \pi_c$ ersetzt durch $\frac{1}{2}\sum_i s_i^2$, und dann alle s_i gegen N konvergieren läßt, also wieder für ein uneigentliches Dreieck.

Bei der Umrechnung von $K(s_{kl})$ in die rechte Seite von (9) bed man lediglich der Additionstheoreme des Sinus und Kosinus; diese geh aber wieder unmittelbar aus der Grundtatsache (A) hervor, indem sie mit gleichwertig sind, daß die ersten Minoren der Determinante von $K($ den Quadraten resp. Produkten der s_i proportional sind.

Somit erscheint die Doppelungleichung (I′), wie es sein muß, eine invariante Eigenschaft des Dreiecks gegenüber der Kleinschen Hau gruppe. Diese Eigenschaft (I′) ist um so bemerkenswerter, als Zäh und Nenner von $\frac{\pi_s}{1+\pi_c}$ sowohl ihr Maximum wie ihre untere Grenze *gleic zeitig* annehmen.

Aus (I′) und (8) folgt noch für π_s die Einschließung [l. c. Formel (1′)²)]:

10) $$0 < \pi_s \leqq \tfrac{3}{8}\sqrt{3}.$$

5. Mit Rücksicht auf (1) und (2) erhält man noch einzeln für Zähler nd Nenner des Quotienten (I) die Ungleichungen:

11) $$0 < \frac{|F|}{R^2} \leqq \frac{3}{4}\sqrt{3},$$

12) $$0 < \frac{\sum_i a_i^2}{R^2} \leqq 9.$$

Die einfachste geometrische Deutung von (I′) ergibt sich wohl mit ilfe des „Brocardschen Winkels“ ω, der als spitzer Winkel bestimmt t durch:

13) $$\operatorname{tg}\omega = \frac{\pi_s}{1+\pi_r}.$$

ieser Winkel ω hat bekanntlich die Eigenschaft, daß wenn man ihn in yklischer Folge — das eine Mal in positivem, das andere Mal in negaivem Sinne — in jeder Ecke des Dreiecks an die anstoßende Seite im nnern anträgt, die drei Transversalen sich in je einem Punkte treffen; iese beiden Punkte sind die „Brocardschen Punkte“, die nebst dem Vinkel ω in der neueren Dreiecksgeometrie eine führende Rolle spielen. ermöge (13) geht dann (I′) über in:

14) $$0 < \omega \leqq 30^0.$$

Eine Reihe weiterer analoger Grenzeinschließungen, die alle der Grundatsache (A) entstammen, habe ich an der zitierten Stelle mitgeteilt.

Königsberg i. Pr., im November 1919.

²) An der zitierten Stelle ist die rechte Seite von (10) durch einen Druckfehler ntstellt.

(Eingegangen am 3. Dezember 1919.)

Laplacesche Integrale und Gammaquotientenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen und Volterraschen Integralgleichungen.

Von

J. Horn in Darmstadt.

Die lineare Differentialgleichung m-ter Ordnung mit der Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$ vom Rang k

$$(A) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + x^{k-1} P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + x^{2(k-1)} P_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + x^{m(k-1)} P_m y = 0,$$

wo

$$P_\mu = a_\mu + \frac{a_\mu^{(1)}}{x} + \frac{a_\mu^{(2)}}{x^2} + \ldots \qquad (\mu = 1, \ldots,$$

in der Umgebung von $x = \infty$ regulär ist, wird in § 1 in eine Differentialgleichung der Form

$$(B) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + P_{m-1} \frac{dy}{dx} + P_m y = 0$$

übergeführt, wo

$$P_\mu = a_\mu + \frac{a_\mu^{(1)}}{x^{\frac{1}{k}}} + \frac{a_\mu^{(2)}}{x^{\frac{2}{k}}} + \ldots \qquad (\mu = 1, \ldots,$$

eine Potenzreihe von $x^{-\frac{1}{k}}$ ist. Wenn die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\alpha^m + a_1 \alpha^{m-1} + \ldots + a_{m-1} \alpha + a_m = 0$$

voneinander verschieden sind, wird die Differentialgleichung (B) durch m Reihen von der Form

$$y = e^{\alpha x + \alpha^{(1)} x^{\frac{k-1}{k}} + \ldots + \alpha^{(k-1)} x^{\frac{1}{k}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{x^{r + \frac{n}{k}}}$$

rmal befriedigt. Eine dieser Reihen möge die Form

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{x^{r+\frac{n}{k}}}$$

aben, was durch eine Substitution

$$y = e^{a x + a^{(1)} x^{\frac{k-1}{k}} + \ldots + a^{(k-1)} x^{\frac{1}{k}}} z$$

reicht wird. Wir können demgemäß in (B) $a_m = 0$, $a_m^{(1)} = 0, \ldots, a_m^{(k-1)} = 0$ oraussetzen. Wenn $a_{m-1} \neq 0$ ist, hat man

$$r = \frac{u_m^{(k)}}{a_{m-1}}.$$

Vir setzen den reellen Teil $\bar{r}$ von r positiv voraus, was durch eine Substitution von der Form $y = x^q z$ erreicht werden kann.

Die Differentialgleichung (B) wird durch ein Laplacesches Integral

$$y = \int_0^{\infty} v(z) e^{z x} dz$$

efriedigt, wo $v(z)$ der linearen Integralgleichung

$$\text{C)} \quad (z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1} z) v(z) = \int_0^z \sum_{\mu=1}^{m} G_\mu (z - \zeta) \zeta^{m-\mu} \cdot v(\zeta) d\zeta$$

enügt; dabei ist

$$G_\mu(z) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{a_\mu^{(\lambda)} (-z)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

bgesehen von $z = 0$ beständig konvergent. Wir stellen eine Lösung $v(z)$ er Integralgleichung (C) durch sukzessive Näherungen dar. Am Schluß on § 1 wird auf den Zusammenhang zwischen der Integralgleichung (C) nd der auf einen besonderen Fall bezüglichen Laplaceschen Transfor- ierten von Poincaré hingewiesen.

In § 2 wird das Laplacesche Integral in eine Gammaquotientenreihe, n Falle $k = 1$ in eine Fakultätenreihe umgewandelt. Dies geschieht nach iner von F. Nevanlinna[1]) dargestellten Methode, die vor der von mir

[1]) Zur Theorie der asymptotischen Potenzreihen (Annales Acad. Scient. Fennicae, erie A, XII (1918), Nr. 3). Durch diese Abhandlung werden die von Watson (A eory of asymptotic series, Transact. of the Royal Society, ser. A, 211 (1911), 279–313; The transformation of an asymptotic series into a convergent series of verse factorials, Rend. del Circ. mat. di Palermo, 34 (1912), S. 41–88 gewonnenen rgebnisse einfacher hergeleitet, vertieft mit Hinblick auf eine Arbeit von Nörlund ur les séries de facultés, Act. math. 37 (1914), S. 326–387) und verallgemeinert.

im Jahresber. d. D. Math.-Ver. **24** (1915), S. 324—328[2]) benutzten Methode den Vorzug besitzt, daß sie von der Hadamardschen Ordnung eines Potenzreihe auf dem Konvergenzkreis keinen Gebrauch macht.

In § 3 komme ich auf die in § 5 meiner Arbeit „Singuläre Systeme linearer Volterrascher Integralgleichungen" (Math. Zeitschr. **3** (1919), S. 265—313) auftretende Integralgleichung

$$t w_1(t) = \int_0^t F(t, \tau) w_1(\tau) d\tau$$

zurück, weil dort (a. a. O. S. 287) gewisse Glieder von $F(t, \tau)$ übersehen worden sind. Die in § 1 der vorliegenden Arbeit dargestellte Methode läßt sich auf diese Integralgleichung sowie auf die entsprechenden nicht-homogenen Integralgleichungen für $w_1(t)$ und $\mathfrak{w}_1(t)$ in § 6 und § 7 der angeführten Arbeit anwenden. An deren Ergebnissen wird nichts geändert.

§ 1.

In der Differentialgleichung (A) oder

$$x^{-m(k-1)} \frac{d^m y}{dx^m} + P_1 x^{-(m-1)(k-1)} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + P_{m-1} x^{-(k-1)} \frac{dy}{dx} + P_m y = 0$$

wird

$$\frac{x^k}{k} = \xi, \quad \frac{d\xi}{dx} = x^{k-1}$$

gesetzt. Dann ist

$$x^{-(k-1)} \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi},$$

$$x^{-2(k-1)} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{k-1}{k\xi} \frac{dy}{d\xi},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x^{-\mu(k-1)} \frac{d^\mu y}{dx^\mu} = \sum_{\nu=0}^{\mu-1} \frac{g_{\mu\nu}}{\xi^{\cdot}} \frac{d^{\mu-\nu} y}{d\xi^{\mu-\nu}};$$

dabei ist $g_{\mu 0} = 1$ und

$$g_{\mu+1,\nu} = \left(\frac{\mu(k-1)}{k} - \nu + 1\right) g_{\mu,\nu-1} + g_{\mu\nu},$$

wobei $g_{\mu,-1} = 0$, $g_{\mu\mu} = 0$ zu setzen ist. Die Differentialgleichung (A) geht über in

$$\frac{d^m y}{d\xi^m} + \mathfrak{P}_1 \frac{d^{m-1} y}{d\xi^{m-1}} + \ldots + \mathfrak{P}_{m-1} \frac{dy}{d\xi} + \mathfrak{P}_m y = 0,$$

[2]) Vgl. auch meine Arbeit „Fakultätenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen" (Math. Ann. **71** (1911), S. 510—532).

$$\mathfrak{P}_\mu = P_\mu + P_{\mu-1}\frac{g_{m-\mu+1,1}}{\xi} + \ldots + P_1\frac{g_{m-1,\mu-1}}{\xi^{\mu-1}} + \frac{g_{m\mu}}{\xi^\mu}$$

$$= a_\mu + \frac{a_\mu^{(1)}}{\xi^{\frac{1}{k}}} + \frac{a_\mu^{(2)}}{\xi^{\frac{2}{k}}} + \ldots \qquad (\mu = 1, \ldots, m).$$

Wir legen daher den weiteren Betrachtungen die Differentialgleichung B) zugrunde und leiten daraus die Integralgleichung (C) her. Die Differentialleichung (B) wird durch die Reihe

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{x^{r+\frac{n}{k}}},$$

ie Integralgleichung (C) durch die Reihe

$$v(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n\,(-z)^{r+\frac{n}{k}-1}}{\Gamma\left(r+\frac{n}{k}\right)}$$

ormal befriedigt. Dabei ist $\arg(-z)$ in dem Ausdruck für $v(z)$ ebenso estzulegen wie bei $G_\mu(z)$ $(\mu = 1, \ldots, m)$.

Wenn man

$$F(z,\zeta) = \frac{\sum_{\mu=1}^{m} G_\mu(z-\zeta)\,\zeta^{m-\mu}}{z^{m-1} + a_1 z^{m-2} + \ldots + a_{m-1}}$$

etzt, schreibt sich die Integralgleichung (C)

$$z\,v(z) = \int_0^z F(z,\zeta)\,v(\zeta)\,d\zeta.$$

s ist

$$H(z,\zeta) = F(z,\zeta) - r = F(z,\zeta) - \frac{a_m^{(k)}}{a_{m-1}} = H_1(z,\zeta) + H_2(z,\zeta),$$

$$H_1(z,\zeta) = \frac{(\zeta-z)^{\frac{1}{k}-1}\,\zeta \sum_{\mu=1}^{m-1}\left[\frac{a_\mu^{(1)}}{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)} + \frac{a_\mu^{(2)}}{\Gamma\left(\frac{2}{k}\right)}(\zeta-z)^{\frac{1}{k}} + \ldots\right]\zeta^{m-\mu-1}}{z^{m-1} + a_1 z^{m-2} + \ldots + a_{m-1}},$$

$$H_2(z,\zeta) = \frac{a_m^{(k)} + \frac{a_m^{(k+1)}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)}(\zeta-z)^{\frac{1}{k}} + \ldots}{z^{m-1} + a_1 z^{m-2} + \ldots + a_{m-1}} - \frac{a_m^{(k)}}{a_{m-1}}$$

$$= \frac{a_{m-1}\left(\frac{a_m^{(k+1)}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)}(\zeta-z)^{\frac{1}{k}} + \ldots\right) - a_m^{(k)}\,(z^{m-1} + a_1 z^{m-2} + \ldots + a_{m-2}z)}{a_{m-1}\,(z^{m-1} + a_1 z^{m-2} + \ldots + a_{m-1})}.$$

Das Gebiet $\mathfrak{R}$ bestehe aus Kreissektoren vom Mittelpunkt 0 und v endlichen Radien, welche weder im Innern noch auf dem Rande eine d Nullstellen der ganzen Funktion $z^{m-1}+a_1 z^{m-2}+\ldots+a_{m-1}$ enthalt und die ganze Umgebung von $z=0$ ausfüllen. Wenn z dem Gebiet und ζ der Geraden $0 \ldots z$ angehört, so hat man wegen

$$|\zeta| \leqq |z|, \quad |z-\zeta| = |z| - |\zeta| \leqq |z|$$

$$|H_1(z,\zeta)| < L(|z|-|\zeta|)^{\frac{1}{k}-1}|z|, \quad |H_2(z,\zeta)| < M|z|^{\frac{1}{k}},$$

wo L, M Konstante sind, also

$$|H(z,\zeta)| < L(|z|-|\zeta|)^{\frac{1}{k}-1}|z| + M|z|^{\frac{1}{k}}.$$

Durch Differentiation der Integralgleichung

$$z v(z) = \int_0^z (r + H(z,\zeta)) v(\zeta) d\zeta$$

erhält man die Gleichung

$$z\frac{dv(z)}{dz} = (r-1)v(z) + \frac{dV(z)}{dz},$$

wobei gesetzt ist:

$$V(z) = \int_0^z H(z,\zeta) v(\zeta) d\zeta.$$

Die lineare Differentialgleichung

$$z\frac{dv(z)}{dz} = (r-1)v(z) + \varphi(z)$$

hat die Lösung

$$v(z) = cz^{r-1} + z^{r-1}\int_0^z z^{-r}\varphi(z)dz$$

mit der willkürlichen Konstanten c. Setzt man

$$\varphi(z) = \frac{dV(z)}{dz},$$

so hat man

$$\int z^{-r}\varphi(z)dz = \int z^{-r} dV(z) = z^{-r}V(z) + r\int z^{-r-1}V(z)dz.$$

Die Integralgleichung (C) formt sich demnach um in die Integralgleichu

$$(D) \qquad v(z) = cz^{r-1} + z^{-1}V(z) + rz^{r-1}\int_0^z z^{-r-1}V(z)dz,$$

die wir durch sukzessive Näherungen lösen:

$$v_0(z) = cz^{r-1},$$

$$v_\nu(z) = z^{-1}V_{\nu-1}(z) + rz^{r-1}\int_0^z z^{-r-1}V_{\nu-1}(z)dz,$$

$$V_{\nu-1}(z) = \int_0^z H(z,\zeta) v_{\nu-1}(\zeta) d\zeta.$$

Man erhält $z^{-r-\frac{\nu}{k}} V_{\nu-1}(z)$ und $z^{-r-\frac{\nu}{k}+1} v_\nu(z)$ als in $\mathfrak{R}$ reguläre Funktionen von $z^{\frac{1}{k}}$. Es ist

$$|v_0(z)| \leqq \mathfrak{C}_0 |z|^{\bar{r}-1}.$$

Unter der Annahme

$$|v_{\nu-1}(z)| = \mathfrak{C}_{\nu-1} |z|^{\bar{r}+\frac{\nu-1}{k}-1}$$

ist

$$|V_{\nu-1}(z)| \leqq \mathfrak{C}_{\nu-1} \int_0^{|z|} (L(|z|-|\zeta|)^{\frac{1}{k}-1}|z| + M|z|^{\frac{1}{k}})|\zeta|^{\bar{r}+\frac{\nu-1}{k}-1} d|\zeta|$$

$$= \mathfrak{C}_{\nu-1} L|z| \int_0^{|z|} (|z|-|\zeta|)^{\frac{1}{k}-1}|\zeta|^{\bar{r}+\frac{\nu-1}{k}-1} d|\zeta|$$

$$+ \mathfrak{C}_{\nu-1} M|z|^{\frac{1}{k}} \int_0^{|z|} |\zeta|^{\bar{r}+\frac{\nu-1}{k}-1} d|\zeta|$$

$$= \mathfrak{C}_{\nu-1} L|z|^{\bar{r}+\frac{\nu}{k}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(\bar{r}+\frac{\nu-1}{k}\right)}{\Gamma\left(\bar{r}+\frac{\nu}{k}\right)} + \frac{\mathfrak{C}_{\nu-1} M|z|^{\bar{r}+\frac{\nu}{k}}}{\bar{r}+\frac{\nu-1}{k}}$$

oder

$$|V_{\nu-1}(z)| \leqq \mathfrak{C}_{\nu-1} Q_{\nu-1} |z|^{\bar{r}+\frac{\nu}{k}},$$

$$Q_{\nu-1} = L \frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(r+\frac{\nu-1}{k}\right)}{\Gamma\left(\bar{r}+\frac{\nu}{k}\right)} + \frac{M}{\bar{r}+\frac{\nu-1}{k}}.$$

Nun ist in $\mathfrak{R}$ $|z^r| \leqq \mathfrak{k}|z|^{\bar{r}}$, $|z^{-r}| \leqq \mathfrak{k}'|z|^{-\bar{r}}$,

$$|v_\nu(z)| \leqq \mathfrak{C}_{\nu-1} Q_{\nu-1} |z|^{\bar{r}+\frac{\nu}{k}-1} \left(1+\frac{|r|k\mathfrak{k}\mathfrak{k}'}{\nu}\right)$$

oder

$$|v_\nu(z)| \leqq \mathfrak{C}_\nu |z|^{\bar{r}+\frac{\nu}{k}-1}$$

$$\frac{\mathfrak{C}_\nu}{\mathfrak{C}_{\nu-1}} = \left(L \frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(\bar{r}+\frac{\nu-1}{k}\right)}{\Gamma\left(\bar{r}+\frac{\nu}{k}\right)} + \frac{M}{\bar{r}+\frac{\nu-1}{k}}\right)\left(1+\frac{|r|k\mathfrak{k}\mathfrak{k}'}{\nu}\right),$$

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\mathfrak{C}_\nu}{\mathfrak{C}_{\nu-1}} = 0.$$

Daher ist die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{-r+1} v_\nu(z)$$

im Gebiet $\mathfrak{R}$ absolut und gleichmäßig konvergent. Die Funktion

$$v(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} v_\nu(z)$$

ist das Produkt aus z^{r-1} und einer in $\mathfrak{R}$ regulären Funktion von $z^{\frac{1}{k}}$, al
$V(z)$ das Produkt aus $z^{r+\frac{1}{k}}$ und einer in $\mathfrak{R}$ regulären Funktion von $z^{\frac{1}{k}}$
$v(z)$ genügt der Integralgleichung (D) und damit der durch Differentiatio
von (C) erhaltenen Gleichung

$$z\frac{dv(z)}{dz} = (r-1)v(z) + \frac{dV(z)}{dz}.$$

Hieraus folgt durch Integration die Gleichung

$$z\,v(z) = \int_0^z (r + H(z,\zeta))v(\zeta)\,d\zeta + \text{Const.},$$

in welcher die Konstante verschwindet.

Die Koeffizienten $P_\mu(x)$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ der Differentialgleichung (I
seien im Gebiet $\mathfrak{R}(xe^{i\omega}) > \sigma(\omega) \geqq 0$ regulär. Dann ist für $\arg z =$

$$|G_\mu(z)| < A\,|z|^{\frac{1}{k}-1} e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)|z|},$$

wo ε eine beliebig kleine und A eine hinreichend große positive Größ
ist[3]). Auf einer Geraden $\arg z = \omega$, welche keine Nullstelle vo
$z^{m-1} + a_1 z^{m-2} + \ldots + a_{m-1}$ enthält, ist

$$|v(z)| < C\,e^{h|z|},$$

wo $h > \sigma(\omega)$ und C hinreichend groß ist. Wenn $\bar{r} < 1$ ist, gilt ei
solche Ungleichung für $|z| \geqq \mathfrak{r} > 0$[4]).

Demnach ist das über die Gerade $\arg z = \omega$ erstreckte Integral

$$y = \int_0^\infty v(z)\,e^{zx}\,dz$$

im Gebiet $\mathfrak{R}(xe^{i\omega}) + \sigma(\omega) < 0$ absolut konvergent. Es genügt, wie ma
in bekannter Weise zeigt, der Differentialgleichung (B).

Im Falle $k = 1$ möge die Differentialgleichung

$$P_0\frac{d^m y}{dx^m} + P_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots + P_{m-1}\frac{dy}{dx} + P_m y = 0,$$

$$P_\mu = a_\mu + \frac{a_\mu^{(1)}}{x} + \frac{a_\mu^{(2)}}{x^2} + \ldots \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m$$

vorliegen, deren charakteristische Gleichung

[3]) Vgl. Jahresber. d. D. Math.-Ver. 25 (1916), S. 321 oben.

[4]) Vgl. Jahresber. d. D. Math.-Ver. 24 (1915), S. 321, 322; Math. Zeitschr. 3 (191
S. 276 f.

$$a_0\alpha^m + a_1\alpha^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\alpha + a_m = 0$$

e voneinander verschiedenen Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ habe. Ohne zunächst ne Substitution $y = e^{\alpha x} z$ vorzunehmen, kann man

$$y = \int_a^{\infty} v(z) e^{zx} dz$$

tzen, wo α eine Wurzel der charakteristischen Gleichung und der Inteationsweg gradlinig ist. Dann ist

$$\frac{d^{m-\mu} y}{dx^{m-\mu}} = \int_a^{\infty} z^{m-\mu} v(z) e^{zx} dz,$$

nd durch partielle Integration ergibt sich

$$\frac{1}{x^\lambda} \frac{d^{m-\mu} y}{dx^{m-\mu}} = (-1)^\lambda \int_a^{\infty} \int_a^{z} \frac{(z-\zeta)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \zeta^{m-\mu} v(\zeta) d\zeta \cdot e^{zx} dz \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots),$$

orausgesetzt, daß

$$\left[e^{zx} \int_a^{z} \frac{(z-\zeta)^{\lambda'-1}}{(\lambda'-1)!} \zeta^{m-\mu} v(\zeta) d\zeta \right]_a^{\infty} = 0 \qquad (\lambda' = 1, \ldots, \lambda)$$

t. Man erhält unter Einführung der ganzen transzendenten Funktion

$$G_\mu(z) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\mu^{(\lambda)} \frac{(-z)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m)$$

ür $v(z)$ die Integralgleichung

$$\sum_{\mu=0}^{m} a_\mu z^{m-\mu} \cdot v(z) = \int_a^{z} \sum_{\mu=0}^{m} G_\mu(z-\zeta) \zeta^{m-\mu} \cdot v(\zeta) d\zeta.$$

Es sei jetzt

$$P_\mu = a_\mu + \frac{a_\mu^{(1)}}{x} + \ldots + \frac{a_\mu^{(p)}}{x^p} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m),$$

o daß eine lineare Differentialgleichung vorliegt, deren Koeffizienten anze Funktionen p-ten Grades sind. Dann ist $G_\mu(z)$ eine ganze Funkon $(p-1)$-ten Grades, und man erhält durch p-malige Differentiation er Integralgleichung für $v(z)$ unter Berücksichtigung der Gleichungen $_\mu(0) = a_\mu^{(1)}$, $G_\mu'(0) = a_\mu^{(2)}, \ldots, G_\mu^{(p-1)}(0) = a_\mu^{(p)}$, $G_\mu^{(p)}(z) \equiv 0$ die Gleichung

$$\frac{d^p}{dz^p}\left[\sum_{\mu=0}^{m} a_\mu z^{m-\mu} \cdot v(z)\right] - \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}\left[\sum_{\mu=0}^{m} a_\mu^{(1)} z^{m-\mu} \cdot v(z)\right]$$

$$+ \frac{d^{p-2}}{dz^{p-2}}\left[\sum_{\mu=0}^{m} a_\mu^{(2)} z^{m-\mu} \cdot v(z)\right] - \ldots + (-1)^p \sum_{\mu=0}^{m} a_\mu^{(p)} z^{m-\mu} \cdot v(z) = 0,$$

e Laplacesche Transformierte von Poincaré.

§ 2.

Durch die Substitution

$$z = \frac{1}{\varkappa}\log t, \qquad t = e^{\varkappa z},$$

wo

$$|\varkappa| = \gamma, \qquad \varkappa = \gamma e^{i(\pi-\omega)} = -\gamma e^{-i\omega}$$

ist, wird der Kreis $|t-1| \leqq 1$ der t-Ebene, den wir $\mathfrak{K}$ nennen, in e Gebiet G der z-Ebene übergeführt, welches, wenn man γ hinreiche groß nimmt, keine Nullstelle von $z^{m-1} + a_1 z^{m-2} + \ldots + a_{m-1}$ enthält Dann ist

$$\varphi(t) = v\left(\frac{1}{\varkappa}\log t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (1-t)^{r+\frac{n}{k}-1}$$

für $|t-1| < 1$ konvergent (vielleicht mit Ausnahme von $t=1$). W zeigen, daß im Kreis $\mathfrak{K}$

$$|\varphi(t)| < D|t|^{-\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}-\varepsilon}$$

ist, wo ε eine beliebig kleine und D eine hinreichend große positive Größe i

Wir setzen

$$t = e^{-\mathfrak{z}}, \qquad \mathfrak{z} = \gamma e^{-i\omega} z.$$

Wenn z dem Sektor $\omega - \Delta \leqq \arg z \leqq \omega + \Delta$ $\left(0 < \Delta < \frac{\pi}{2}\right)$ angehört, d wir mit S bezeichnen, ist $-\Delta \leqq \arg \mathfrak{z} \leqq \Delta$. Im Sektor S, welcher ke Nullstelle von $z^{m-1} + a_1 z^{m-2} + \ldots + a_{m-1}$ enthalten und in welchem stetige Funktion $\sigma(\arg z)$ den größten Wert σ annehmen möge, ist

$$|v(z)| < C e^{(\sigma+\delta)|z|} = C e^{\frac{\sigma+\delta}{\gamma}|\mathfrak{z}|},$$

wo δ eine beliebig kleine und C eine hinreichend große positive Zahl ist Wegen

$$|\mathfrak{z}| = \frac{\Re(\mathfrak{z})}{\cos \arg \mathfrak{z}} \leqq \frac{\Re(\mathfrak{z})}{\cos \Delta}$$

ist

$$|v(z)| < C e^{\frac{(\sigma+\delta)\Re(\mathfrak{z})}{\gamma \cos \Delta}}.$$

Es ist

$$e^{-\Re(\mathfrak{z})} = |t|;$$

also ist in dem Gebiet der t-Ebene, welches dem Sektor S der z-Ebe entspricht,

$$|\varphi(t)| < C|t|^{-\frac{\sigma+\delta}{\gamma\cos\Delta}} = C|t|^{-\frac{\sigma}{\gamma}-\delta'},$$

[5]) Vgl. Math. Ann. 71 (1911), S. 513 f.

[6]) Im Falle $r < 1$ gilt eine solche Ungleichung für $|z| > r > 0$.

o auch δ' beliebig klein angenommen werden kann. Wenn z dem Gebiet G, aber nicht dem Sektor S angehört, ist $|z|$ beschränkt, also

$$|v(z)| = |\varphi(t)| < C',$$

o C' eine Konstante ist; da im Kreis $\mathfrak{K}$ $|t| \leqq 2$, also

$$1 \leqq 2^{\frac{\sigma}{\gamma}+\delta'} |t|^{-\frac{\sigma}{\gamma}-\delta'}$$

t, hat man

$$|\varphi(t)| < 2^{\frac{\sigma}{\gamma}+\delta'} C' \cdot |t|^{-\frac{\sigma}{\gamma}-\delta'}.$$

Wenn unter D die größere der beiden Größen C und $2^{\frac{\sigma}{\gamma}+\delta'} C'$ verstanden wird, ist im Kreis $\mathfrak{K}$

$$|\varphi(t)| < D|t|^{-\frac{\sigma}{\gamma}-\delta'}$$

der, da σ von $\sigma(\omega)$ bei hinreichend kleinem Δ beliebig wenig abweicht,

$$|\varphi(t)| < D|t|^{-\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}-\varepsilon},$$

o ε beliebig klein und D hinreichend groß ist.

Wir zeigen im Anschluß an Nevanlinna, daß

$$|B_n| < \frac{K\Gamma\left(\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon+n\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon\right)}$$

t, wo K von n nicht abhängt.

Die Funktion

$$\psi(t) = t^{\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon-1}(1-t)^{1-r}\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n (1-t)^{\frac{n}{k}}$$

t eine für $|t-1|<1$ reguläre Funktion von $(1-t)^{\frac{1}{k}}$. Es sei $0<\varrho<1$. Für $\varrho \leqq |t-1| \leqq 1$ ist

$$|\psi(t)| < D|(1-t)^{1-r}| \cdot |t|^{\varepsilon-1} < Q|t|^{\varepsilon-1},$$

wenn $D|(1-t)^{1-r}| < Q$ ist. Für $|t-1|<\varrho$ liegt $|\psi(t)|$ unter einer endlichen Schranke E; wenn $2^{1-\varepsilon}E < Q$ ist, ist wegen $|t|<2$

$$|\psi(t)| < Q|t|^{\varepsilon-1}.$$

Wenn man

$$u = (1-t)^{\frac{1}{k}}, \qquad t = 1-u^k$$

etzt, geht $\psi(t)$ in

$$\chi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n u^n$$

über, und man hat

$$K_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \chi(e^{i\vartheta})\, e^{-ni\vartheta}\, d\vartheta,$$

$$|K_n| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\chi(e^{i\vartheta})|\, d\vartheta.$$

Es ist

$$|\chi(e^{i\vartheta})| = |\psi(1-e^{ik\vartheta})| < Q\,|1-e^{ik\vartheta}|^{\varepsilon-1} = Q\left|2\sin\frac{k\vartheta}{2}\right|^{\varepsilon-1},$$

$$|K_n| < \frac{Q}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|2\sin\frac{k\vartheta}{2}\right|^{\varepsilon-1} d\vartheta = K,$$

wo K endlich und von n unabhängig ist. Nun ist

$$\varphi(t) = t^{-\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}-2\varepsilon+1}\cdot(1-t)^r\psi(t).$$

Wenn man

$$\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon = \alpha$$

setzt, ist

$$t^{-\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}-2\varepsilon+1} = (1-(1-t))^{1-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+n-2}{n}(1-t)^n,$$

also

$$B_n = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu-2}{\nu} K_{n-\nu},$$

$$|B_n| < K\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu-2}{\nu} = K\binom{\alpha+n-1}{n} = K\frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!\,\Gamma(\alpha)} = \frac{K\,\Gamma\left(\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon+n\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon\right)}$$

Wir haben für $\Re(xe^{i\omega})+\sigma(\omega)<0$

$$y = -\frac{1}{x}\int_0^1 \varphi(t)\, t^{\frac{x}{x}-1}\, dt$$

$$= -\frac{1}{x}\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} B_n (1-t)^{r+\frac{n}{k}-1} t^{\frac{x}{x}-1}\, dt$$

$$= -\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} B_n \int_0^1 (1-t)^{r+\frac{n}{k}-1} t^{\frac{x}{x}-1}\, dt$$

$$= -\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{\Gamma\left(r+\frac{n}{k}\right)\Gamma\left(\frac{x}{x}\right)}{\Gamma\left(r+\frac{n}{k}+\frac{x}{x}\right)}.$$

Die gliedweise Integration ist gestattet, da, wie wir zeigen werden, die Reih

$$\sum_{n=0}^{\infty} |B_n| \int_0^1 (1-t)^{\bar{r}+\frac{n}{k}-1} t^{\Re\left(\frac{x}{\varkappa}\right)-1} dt$$

onvergent ist[7]).

Es ist nämlich

$$|B_n| \int_0^1 (1-t)^{\bar{r}+\frac{n}{k}-1} t^{\Re\left(\frac{x}{\varkappa}\right)-1} dt < \frac{K\Gamma\left(\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon+n\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon\right)} \frac{\Gamma\left(\Re\left(\frac{x}{\varkappa}\right)\right)\Gamma\left(\bar{r}+\frac{n}{k}\right)}{\Gamma\left(\Re\left(\frac{x}{\varkappa}\right)+\bar{r}+\frac{n}{k}\right)}.$$

ie rechte Seite ist wegen

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon+n\right)}{\Gamma(n+1)} = n^{\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon-1}\cdot(1+\delta_1), \qquad \lim_{n=0}\delta_1 = 0,$$

$$\frac{\Gamma\left(\bar{r}+\frac{n}{k}\right)}{\Gamma\left(\Re\left(\frac{x}{\varkappa}\right)+\bar{r}+\frac{n}{k}\right)} = \left(\frac{n}{k}\right)^{-\Re\left(\frac{x}{\varkappa}\right)}\cdot(1+\delta_2), \qquad \lim_{n=0}\delta_2 = 0$$

---

[7]) Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ in jedem Intervall $a+\delta \leqq x \leqq b$, wo $\delta > 0$, $a+\delta < b$ ist,

eichmäßig konvergiert, ist

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx,$$

rausgesetzt, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b |f_n(x)|\,dx$$

nvergiert.

Dieser auch bisher von mir benutzte Satz wird nach Nevanlinna wie folgt wiesen. Es ist

$$\int_{a+\delta}^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{a+\delta}^b f_n(x)\,dx$$

d

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_{a+\delta}^b f_n(x)\,dx \right| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{a+\delta}^b |f_n(x)|\,dx \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b |f_n(x)|\,dx.$$

her ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a+\delta}^b f_n(x)\,dx$$

r $0 \leqq \delta \leqq b-a$ absolut und gleichmäßig konvergent und also eine stetige Funktion n δ. Die obige Gleichung gilt also auch für $\delta = 0$.

Der ausgesprochene Satz gilt auch, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ in jedem Intervall

$+\delta \leqq x \leqq b-\delta'$ $(\delta > 0,\ \delta' > 0,\ a+\delta < b-\delta')$ gleichmäßig konvergiert.

von der Form

$$\frac{K\Gamma\left(\Re\left(\frac{x}{\varkappa}\right)\right)k^{\Re\left(\frac{x}{\varkappa}\right)}}{\Gamma\left(\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon\right)}\cdot n^{\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon-\Re\left(\frac{x}{\varkappa}\right)-1}\cdot(1+\delta),\qquad \lim_{n=\infty}\delta=0.$$

Demnach ist die obige Reihe für

$$\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon-\Re\left(\frac{x}{\varkappa}\right)<0,$$

wo ε eine beliebig kleine positive Zahl ist, und also auch für

$$\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}-\Re\left(\frac{x}{\varkappa}\right)=\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\Re(xe^{i\omega})<0,$$

d. h. für

$$\Re(xe^{i\omega})+\sigma(\omega)<0$$

konvergent.

Das der Differentialgleichung (B) genügende Laplacesche Integral läßt sich demnach in die für $\Re(xe^{i\omega})+\sigma(\omega)<0$ absolut konvergente Gammaquotientenreihe

$$y=-\frac{1}{\varkappa}\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{\Gamma\left(r+\frac{n}{k}\right)\Gamma\left(\frac{x}{\varkappa}\right)}{\Gamma\left(r+\frac{n}{k}+\frac{x}{\varkappa}\right)}$$

entwickeln. Im Falle $k=1$ geht diese in die Fakultätenreihe

$$y=\text{Const.}\,\frac{\Gamma\left(\frac{x}{\varkappa}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{\varkappa}+r\right)}\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{r(r+1)\ldots(r+n-1)}{\left(\frac{x}{\varkappa}+r\right)\left(\frac{x}{\varkappa}+r+1\right)\ldots\left(\frac{x}{\varkappa}+r+n-1\right)}$$

über.

§ 3.

In § 5 der Arbeit „Singuläre Systeme linearer Volterrascher Integrgleichungen“ (Math. Zeitschr. 3 (1919), S. 287) ist

$$F(t,\tau)=(t-\tau)^{\frac{1}{k}-1}\sum a_{\lambda\mu}t^{\lambda}(t-\tau)^{\frac{\mu}{k}}\quad(\lambda,\mu=0,1,2,\ldots$$

A. a. O. ist gezeigt, daß $a_{00}=a_{01}=\ldots=a_{0,k-2}=0$ ist. Wir setzen

$$F(t,\tau)=\frac{r}{k}+H_1(t,\tau)+H_2(t,\tau),$$

wo

$$\frac{r}{k}=a_{0,k-1},$$

$$H_1(t,\tau)=(t-\tau)^{\frac{1}{k}-1}t\sum_{\lambda=1}^{\infty}\cdot\sum_{\mu=0}^{k-1}a_{\lambda\mu}t^{\lambda-1}(t-\tau)^{\frac{\mu}{k}},$$

$$H_2(t,\tau)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=k}^{\infty}a_{\lambda\mu}t^{\lambda}(t-\tau)^{\frac{\mu-k+1}{k}}$$

Wenn t dem Gebiet $\mathfrak{R}$ und τ der Geraden $0 \ldots t$ angehört, ist

$$|H_1(t,\tau)| < L(|t| - |\tau|)^{\frac{1}{k}-1}|t|, \quad |H_2(t,\tau)| < M|t|^{\frac{1}{k}},$$

o

$$F(t,\tau) = \frac{r}{k} + H(t,\tau),$$

$$|H(t,\tau)| < L(|t| - |\tau|)^{\frac{1}{k}-1}|t| + M|t|^{\frac{1}{k}}.$$

Die Integralgleichung

$$tw_1(t) = \int_0^t F(t,\tau)w_1(\tau)d\tau$$

rd nach der in § 1 für die Integralgleichung

$$zv(z) = \int_0^z F(z,\zeta)v(\zeta)d\zeta$$

rgestellten Methode behandelt; sie wird durch das Produkt aus $t^{\frac{r}{k}-1}$

d einer in $\mathfrak{R}$ regulären Funktion von $t^{\frac{1}{k}}$ befriedigt.

In der Integralgleichung

$$tw_1(t) = \int_0^t F(t,\tau)w_1(\tau)d\tau + E(t)$$

a. O. § 6, S. 292) hat $F(t,\tau)$ die soeben angegebene Form. Wie in
l erhält man durch Differentiation der Integralgleichung

$$t\frac{dw_1(t)}{dt} = \left(\frac{r}{k} - 1\right)w_1(t) + \frac{dW(t)}{dt} + \frac{dE(t)}{dt},$$

$$W(t) = \int_0^t H(t,\tau)w_1(\tau)d\tau$$

d hieraus

$$w_1(t) = ct^{\frac{r}{k}-1} + t^{\frac{r}{k}-1}\int_0^t t^{-\frac{r}{k}}\frac{dW(t)}{dt}dt + t^{\frac{r}{k}-1}\int_0^t t^{-\frac{r}{k}}\frac{dE(t)}{dt}dt.$$

Wir nehmen $c = 0$ an und erhalten durch partielle Integration

$$w_1(t) = t^{-1}W(t) + \frac{r}{k}t^{\frac{r}{k}-1}\int_0^t t^{-\frac{r}{k}-1}W(t)dt + t^{\frac{r}{k}-1}\int_0^t t^{-\frac{r}{k}}\frac{dE(t)}{dt}dt$$

ırch sukzessive Näherungen ergibt sich

$$w_1^{(0)}(t) = t^{\frac{r}{k}-1}\int_0^t t^{-\frac{r}{k}}\frac{dE(t)}{dt}dt,$$

$$w_1^{(\nu)}(t) = t^{-1}W^{(\nu-1)}(t) + \frac{r}{k}t^{\frac{r}{k}-1}\int_0^t t^{-\frac{r}{k}-1}W^{(\nu-1)}(t)dt,$$

$$W^{(\nu-1)}(t) = \int_0^t H(t,\tau)\, w_1^{(\nu-1)}(\tau)\, d\tau \qquad (\nu = 1, 2, \ldots$$

Da $E(t)$ eine mit $t^{\frac{r+j}{k}}$ [8]) multiplizierte Potenzreihe von $t^{\frac{1}{k}}$ ist, so hab wir im Gebiet $\mathfrak{R}$

$$\left|\frac{dE(t)}{dt}\right| < N\,|t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}-1}.$$

Dann ist

$$|w_1^{(0)}(t)| \leqq \mathfrak{C}_0\,|t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}-1}$$

Unter der Annahme

$$|w_1^{(\nu-1)}(t)| \leqq \mathfrak{C}_{\nu-1}\,|t|^{\frac{\bar{r}+j+\nu-1}{k}-1}$$

ist

$$|W^{(\nu-1)}(t)| \leqq \mathfrak{C}_{\nu-1}\left\{L\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(\frac{\bar{r}+j+\nu-1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{\bar{r}+j+\nu}{k}\right)} + \frac{Mk}{\bar{r}+j+\nu-1}\right\}|t|^{\frac{\bar{r}+j+\nu}{k}},$$

$$|w_1^{(\nu)}(t)| \leqq \mathfrak{C}_\nu\,|t|^{\frac{\bar{r}+j+\nu}{k}-1},$$

$$\frac{\mathfrak{C}_\nu}{\mathfrak{C}_{\nu-1}} = \left\{L\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(\frac{\bar{r}+j+\nu-1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{\bar{r}+j+\nu}{k}\right)} + \frac{Mk}{\bar{r}+j+\nu-1}\right\}\left(1+\frac{|r|\,\mathfrak{k}\mathfrak{k}'}{j+\nu}\right),$$

also

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{\mathfrak{C}_\nu}{\mathfrak{C}_{\nu-1}} = 0.$$

Demnach ist die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} t^{-\frac{r+j}{k}+1}\, w_1^{(\nu)}(t)$$

im Gebiet $\mathfrak{R}$ absolut und gleichmäßig konvergent.

Die Integralgleichung

$$t\,\mathfrak{w}_1(t) = \int_0^t F(t,\tau)\,\mathfrak{w}_1(\tau)\,d\tau + E(t)$$

(a. a. O. § 7, S. 301) wird ebenso behandelt. Die früheren Ergebn werden dadurch, daß gewisse Glieder von $F(t,\tau)$ weggelassen wan nicht beeinträchtigt.

---

[8]) A. a. O. S. 293, Zeile 4 muß $t^{\frac{r+j}{k}}$ statt t^{r+j} stehen. — An verschiede Stellen (a. a. O. S. 289–308) ist eine reguläre Funktion von $t^{\frac{1}{k}}$ ungenau als reg bezeichnet.

(Eingegangen am 8. Dezember 1919.)

Über affine Geometrie XXVIII:
estimmung aller Flächen, die von den umschriebenen Zylindern längs ebener Kurven berührt werden.

Von

Wilhelm Blaschke in Hamburg.

Von einer Frage der Variationsrechnung aus[1]) kommt man zu der n Titel gestellten Aufgabe, die man auch so ausdrücken kann: *Alle lächen zu ermitteln, die bei jeder Parallelbeleuchtung ebene Eigenschatten-enzen haben.* Ich will hier zeigen: *Die einzigen nicht abwickelbaren lächen mit dieser Eigenschaft sind die Flächen von zweiter Ordnung.* abei werde ich von den Flächen nur voraussetzen, daß die Koordinaten nes Flächenpunktes fünfmal stetig ableitbare Funktionen der Flächen-arameter sind. Früher[1]) hatte ich das Ergebnis unter der erheblich ngeren Annahme bewiesen, daß die Auswahl nur unter den geschlossenen onvexen Flächen (Eiflächen) zu treffen sei. Zum Schluß gebe ich noch s Anwendung eine Kennzeichnung der Maßbestimmungen Riemanns nter den allgemeineren, zu beliebigen Variationsproblemen gehörigen Maß-estimmungen.

§ 1.

Hyperbolisch gekrümmte Flächen.

Besonders einfach läßt sich der Nachweis für den Fall hyperbolisch ekrümmter Flächen erbringen, was schon Herr G. Herglotz bemerkt hat, ie mir durch mündliche Mitteilung bekannt ist, nämlich etwa folgender-aßen. An einer Stelle hyperbolischer Krümmung kann man durch ge-

[1]) W. Blaschke, Räumliche Variationsprobleme mit symmetrischer Trans-rsalitätsbedingung. Berichte der math.-phys. Klasse d. sächs. Ges. d. Wiss. Leipzig, (1916), S. 50—55. Vgl. auch im folgenden § 3.

eignete Wahl des (im allgemeinen schiefwinkligen) Achsenkreuzes
Flächengleichung in der Form ansetzen:

$$(1) \qquad z = xy + \tfrac{1}{6}(Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3) + (4).$$

Für die Berührungspunkte der Fläche mit dem Zylinder, dessen Erzeuge
parallel zur x-Achse laufen, muß $z_x = \partial z/\partial x = 0$ sein oder

$$(2) \qquad 0 = y + \tfrac{1}{2}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) + \ldots.$$

Da die Tangente an die Berührungslinie dieses Zylinders mit der Fläc
im Ursprung mit der x-Achse zusammenfällt, so kann man diese „Eig
schattengrenze" in der Form $y = y(x)$, $z = z(x)$ dargestellt denken, u
man findet durch Ableitung der beiden Gleichungen (2) und (1) nach

$$\begin{aligned} 0 &= y' + Ax + By + \ldots, \\ 0 &= y'' + A + \ldots; \\ z' &= y + xy' + \tfrac{1}{2}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) + \ldots, \\ z'' &= 2y' + xy'' + Ax + By + \ldots, \\ z''' &= 3y'' + A + \ldots \end{aligned} \qquad (3)$$

Setzt man hierin $x = y = 0$, so folgt für die Ableitungen im Urspru

$$\begin{aligned} y' &= 0, \quad y'' = -A; \\ z' &= 0, \quad z'' = 0, \quad z''' = -2A. \end{aligned} \qquad (4)$$

Soll die Eigenschattengrenze eben sein, so muß

$$(5) \qquad y''z''' - z''y''' = 2A^2 = 0$$

oder

$$(6) \qquad A = 0$$

sein.

Für die Asymptotenlinie auf unserer Fläche, die im Ursprung
x-Achse berührt, gilt die Differentialgleichung

$$(7) \qquad z_{xx} + 2z_{xy}y' + z_{yy}y'^2 = 0.$$

Durch Ableitung nach x folgt daraus

$$\begin{aligned} &z_{xxx} + 3z_{xxy}y' + 3z_{xyy}y'^2 + z_{yyy}y'^3 \\ &\quad + 2z_{xy}y'' + 2z_{yy}y'y'' = 0. \end{aligned} \qquad (8)$$

Für den Ursprung o ergibt sich aus (7) $y' = 0$ und wegen $A = 0$ aus
$y'' = 0$. Da für die Asymptotenlinie überdies $z' = 0$, $z'' = 0$ ist, so
sie hier einen Wendepunkt. Vertauscht man in der ganzen Betrachtu
die x- und y-Achse, so folgt, daß auch die zweite Asymptotenlinie
Ursprung o einen Wendepunkt besitzt.

Da o keine ausgezeichnete Rolle auf unserer Fläche spielt, so be-ehen die Asymptotenlinien nur aus Wendepunkten, sind also geradlinig, d somit ist unsere Fläche notwendig eine algebraische Fläche zweiter rdnung. Diese Flächen haben aber in der Tat die gewünschte Eigen-haft, und demnach ist für hyperbolisch gekrümmte Flächen der Nachweis Ende. Beschränkt man sein Augenmerk auf *analytische* Flächen, so damit der Nachweis auch für elliptische Flächen erledigt, sonst bedarf für diesen Fall einer besonderen Überlegung.

§ 2.

Elliptisch gekrümmte Flächen.

An einer Stelle elliptischer Krümmung kann man durch geeignete hsenwahl die Flächengleichung, wie man leicht einsieht[2]), auf die anonische" Form bringen

$$) \quad z = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \frac{C}{6}(x^3 - 3xy^2) + \\ + \frac{1}{24}(ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4) + (5).$$

ir alle Flächenpunkte, deren Tangentenebenen zu einer festen Richtung $z = 0$ parallel laufen, gilt

$$0) \quad z_x + \lambda z_y = 0$$

r festes λ. Die Kurve der Berührungspunkte möge in der Ebene

$$1) \quad \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

gen. Dann müssen die beiden Gleichungen

$$2) \quad \alpha x + \beta y + \frac{\gamma}{2}(x^2+y^2) + \frac{C\gamma}{6}(x^3 - 3xy^2) + \ldots = 0$$

d (10) oder

$$x + \lambda y + \frac{C}{2}(x^3 - 2\lambda xy - y^2) \\ 3) \quad + \frac{1}{6}\{(a+\lambda b)x^3 + 3(b+\lambda c)x^2y + 3(c+\lambda d)xy^2 + (d+\lambda e)y^3\} \\ + \ldots = 0$$

eselbe Kurve der x, y-Ebene darstellen. Nehmen wir für den Augen-ck $\lambda \neq 0$, so können wir die Kurve in der Form $y = y(x)$ darstellen d finden durch Ableitung von (12) und (13) im Ursprung

[2]) G. Pick, Über affine Geometrie IV; Differentialinvarianten der Flächen genüber affinen Transformationen. Leipziger Berichte, 69 (1917), S. 107—136, . S. 124—126.

$$y' = -\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{1}{\lambda}, \tag{14}$$

$$y'' = -\frac{\gamma(1+\lambda^2)}{\beta\lambda^2} = -C\frac{3\lambda^2-1}{\lambda^3}. \tag{15}$$

Daraus folgt zunächst

$$\alpha : \beta : \gamma = (1+\lambda^2) : \lambda(1+\lambda^2) : C(3\lambda^2-1). \tag{16}$$

Die Schmiegebenen an die Eigenschattengrenzen durch einen Punkt ein beliebigen elliptisch gekrümmten Fläche umhüllen also einen rationa Kegel (15), *der für* $C \neq 0$ *von dritter Klasse ist und sich für* $C =$ *auf ein Ebenenbüschel reduziert.*

Durch nochmalige Ableitung von (13) und (12) folgt unter Benutzu der bereits für y' und y'' gefundenen Werte einerseits

$$y''' = -\frac{\lambda\{(a+\lambda b)\lambda^3 - 3(b+\lambda c)\lambda^2 + 3(c+\lambda d)\lambda - (d+\lambda e)\} + 3C^2(\lambda^2-1)(3\lambda}{\lambda^5} \tag{17}$$

und andererseits

$$y''' = -C^2\frac{(3\lambda^2-1)(\lambda^4+6\lambda^2-3)}{(1+\lambda^2)\lambda^5}. \tag{18}$$

Der letzte Ausdruck wäre für $C \neq 0$ ein irreduzibler Quotient eines Po noms 6. und eines Polynoms 7. Grades in λ, könnte also mit dem vorh gehenden Ausdruck, in dem die Gradzahlen je um eine Einheit niedri sind, nicht identisch in λ übereinstimmen. Somit muß notwendig

$$C = 0 \tag{19}$$

sein.

Um nun weiter zu schließen, kann man verschiedene Wege einschlag Am schnellsten kommt man zum Ziele, wenn man einen Satz aus zwölften dieser Mitteilungen über Affingeometrie heranzieht[3]). Dort h ich nämlich gezeigt: Wenn bei einer elliptisch gekrümmten Fläche dur weg $C = 0$ ist, d. h. wenn es zu jeder Stelle Flächen zweiter Ordnu gibt, die die Fläche in (mindestens) dritter Ordnung berühren, so ist Fläche selbst von zweiter Ordnung. Aber man kann auch ohne die Hilfssatz auskommen, und zwar etwa folgendermaßen[4]).

Für $C = 0$ wird aus (16)

$$\alpha : \beta : \gamma = 1 : \lambda : 0. \tag{20}$$

Die Gleichungen

$$x + \lambda y = 0 \tag{21}$$

[3]) W. Blaschke, Über affine Geometrie XII: Von den Eiflächen. Leipz Berichte, 70 (1918), S. 18–37, bes. § 7, S. 30.

[4]) Die folgende Schlußweise ist ähnlich wie in meiner unter [1]) genannten Sch

nd

10) $$z_x + \lambda z_y = 0$$

eben also dieselbe Bedingung zwischen x, y. Somit genügt die Fläche er partiellen Differentialgleichung

22) $$x z_y - y z_x = 0,$$

eren allgemeine Lösung die Form

23) $$z = f(x^2 + y^2)$$

at. Da unsere Koordinatenachsen im allgemeinen schiefwinklig sind, nden wir: Unsere Fläche ist affin zu einer Drehfläche, und jede Ebene = konst. schneidet sie in einer Ellipse.

Unsere Aufgabe ist affininvariant, wir können also durch eine Affinität rreichen, daß unser Achsenkreuz rechtwinklig und die Fläche eine wirkiche Drehfläche wird. Schneiden wir nun die transformierte Fläche durch ine Ebene $\alpha x + z = 0$, wo α genügend klein ist, so muß die Schnitturve, da der Ursprung o auf der Fläche keine ausgezeichnete Rolle pielt, wieder eine Ellipse sein, die wegen (23) zur Ebene $y = 0$ symnetrisch liegt. Durch Umdrehung dieser Ellipse um die z-Achse entteht aber ein Stück einer Fläche zweiter Ordnung, und dieses Stück nthält eine Umgebung des Ursprungs o auf der Fläche. Somit liegt diese Umgebung von o ganz auf einer Fläche zweiter Ordnung, und daher muß, a o auf der Fläche nicht ausgezeichnet ist, unsere ganze Fläche derselben Fläche zweiter Ordnung angehören, w. z. b. w.

§ 3.

Variationsprobleme mit symmetrischer Transversalität.

Es sei

24) $$\int F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ x_1', x_2', \ldots, x_n')\, dt$$

as Grundintegral eines Variationsproblems in der Parameterform von Weierstraß, so daß also die Funktion F die Homogeneitätseigenschaft hat:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \lambda x_1', \lambda x_2', \ldots, \lambda x_n') = \lambda F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ x_1', x_2', \ldots, x_n')$$

ir $\lambda > 0$. Dann sieht die sogenannte *Transversalitätsbedingung* bekanntich[5]) so aus

26) $$F_1 \delta x_1 + F_2 \delta x_2 + \ldots + F_n \delta x_n = 0,$$

[5]) Vgl. etwa O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig und Berlin 909, S. 303 (5).

wo

$$F_k = \frac{\partial F}{\partial x_k'}$$

bedeutet. In dieser Bedingung treten zwei Richtungen: die „Extremalr richtung“ $x_1' : x_2' : \ldots : x_n'$ und die „Transversalenrichtung“ $\delta x_1 : \delta x_2 : \ldots : \delta$ im allgemeinen unsymmetrisch auf, da die Beziehung in den δx_k linea in den x_k' im allgemeinen nicht linear ist.

Es sollen nun die Variationsprobleme mit symmetrischer Tran versalitätsbedingung aufgesucht werden.

Das Ergebnis ist folgendes: *Unter geeigneten Voraussetzungen üb die Funktion F unter dem Grundintegral sind für $n \geqq 3$ die einzig Variationsprobleme mit symmetrischer Transversalität die von der For*

$$F^2 = \sum g_{ik} x_i' x_k', \tag{27}$$

wo die g_{ik} Funktionen der x mit von Null verschiedener Determinante sin

Die Funktion F genügt wegen (25) der Formel von Euler f homogene Funktionen

$$F_1 x_1' + F_2 x_2' + \ldots = F \tag{28}$$

und daraus ergibt sich durch partielle Ableitung nach den x' weiter

$$\sum F_{ik} x_k' = 0, \tag{29}$$

wenn die F_{ik} die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von F nach d x' bedeuten. Daraus folgt: Es gibt eine Funktion Φ der x und x', daß zwischen den algebraischen Komplementen Φ_{ik} in der Matrix der F die Beziehung

$$\Phi_{ik} = \Phi x_i' x_k' \tag{30}$$

besteht.

Als *Voraussetzung über die Funktion F* werde ich im folgenden b nutzen, daß F mit den Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetig i und daß Φ nicht identisch verschwindet, so daß in der wegen (29) ve schwindenden Determinante der F_{ik} nicht auch alle $(n-1)$-reihige Minoren Null sind[6]).

Für den Fall $n = 3$ läßt sich unser Satz auf die Überlegungen v § 1 und § 2 zurückführen, wenn man die Transversalitätsbedingung an d „Eichfläche“ geometrisch deutet, die im Raum der x' durch die Gleichu

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ x_1', x_2', \ldots, x_n') = 1 \tag{31}$$

[6]) Die Voraussetzung $\Phi \neq 0$ entspricht dem, daß wir in den vorhergehend Abschnitten nicht abwickelbare Flächen betrachtet hatten.

klärt ist[1]). Hier soll aber ein anderer Nachweis erbracht werden, von em sofort einleuchtet, daß er für jede Dimensionenzahl $n \geqq 3$ gilt.

Da in (26) die Richtungen δx_k und $-\delta x_k$ gleichwertig sind, so üssen im Fall der Symmetrie auch die Richtungen x_k' und $-x_k'$ gleichertig auftreten. Wir können daher die x_k' als homogene Koordinaten in nem $(n-1)$-dimensionalen Raum R' deuten oder, wenn wir $x_n' = 1$ etzen, die $x_1', \ldots, x_{n-1}$ als unhomogene Koordinaten. Wir setzen bei stgehaltenen x_k

$$F_k(x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}', 1) = y_k \tag{32}$$

nd können die x' so wählen, daß eines der y_k, z. B. $y_n \neq 0$ wird. Dann önnen wir die $y_1 : y_n, y_2 : y_n, \ldots, y_{n-1} : y_n$ als unhomogene Koordinaten einem Raum R wählen. Für die Funktionaldeterminante der Abbildung gibt sich

$$\frac{\partial\left(\frac{y_1}{y_n}, \frac{y_2}{y_n}, \ldots, \frac{y_{n-1}}{y_n}\right)}{\partial(x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}')} = \frac{1}{y_n^n} \cdot \begin{vmatrix} F_{11} & F_{21} & \ldots & F_{n-11} & y_1 \\ F_{12} & F_{22} & \ldots & F_{n-12} & y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{1n} & F_{2n} & \ldots & F_{n-1n} & y_n \end{vmatrix}. \tag{33}$$

ultipliziert man die erste Zeile mit x_1', die zweite mit x_2' ... und addiert ir letzten, nachdem man diese mit $x_n' = 1$ multipliziert hat, so folgt egen (29), daß die $n-1$ ersten Glieder der letzten Zeile Null werden nd wegen (28) für das letzte der Wert F. Somit ist nach (30)

$$\frac{\partial\left(\frac{y_1}{y_n}, \frac{y_2}{y_n}, \ldots, \frac{y_{n-1}}{y_n}\right)}{\partial(x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}')} = \frac{F \cdot \Phi_{nn}}{y_n^n} = \frac{F \cdot \Phi}{y_n^{n-2}}. \tag{34}$$

an kann also nach unseren Voraussetzungen das Stellenpaar x' in R' nd y in R so wählen, daß die Funktionaldeterminante der Abbildung $\neq 0$ ausfällt, und deshalb zwei Umgebungen (x') und (y) dieser Stellen begrenzen, die durch die Abbildung (32) eineindeutig und stetig einander geordnet werden.

Soll die Transversalitätsbedingung (26) symmetrisch sein, so muß auch stgehaltenen δx_k eine lineare Beziehung zwischen den x_k' entsprechen, h. einer „Ebene"

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n = 0 \tag{35}$$

R muß eine „Ebene" in R' entsprechen. Da also den Ebenen in (y) e Ebenen in (x') zugeordnet sind und die Abbildung umkehrbar einutig und stetig ist, folgt[7]), daß die Beziehung für $n \geqq 3$ kollinear sein muß:

$$y_i = \varrho \sum g_{ik} x_k'. \tag{36}$$

[7]) Man sehe etwa das Lehrbuch von G. Darboux, Principes de géométrie alytique, Paris 1917. S. 28—32. Oder Enzyklopädie III AB 5 (A. Schoenflies), 449 unten.

Daraus ergibt sich aber für F

$$F = \sum x_i' y_i = \varrho \sum g_{ik} x_i' x_k', \tag{37}$$

wo der Faktor ϱ von den x und x' abhängen kann. Durch Ableitu von (37) nach x_i' folgt

$$F_i = y_i = \frac{\partial \varrho}{\partial x_i'} \sum g_{ik} x_i' x_k' + 2\varrho \sum g_{ik} x_k'. \tag{38}$$

Durch Vergleichung mit (36) ergibt sich

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x_i'} \sum g_{ik} x_i' x_k' = -\varrho \sum g_{ik} x_k' \tag{39}$$

oder

$$\frac{\partial \ln \varrho}{\partial x_i'} = \frac{\partial}{\partial x_i'} \ln \frac{1}{\sqrt{\pm \sum g_{ik} x_i' x_k'}}. \tag{40}$$

Daraus folgt

$$\varrho = \frac{\sigma(x_1, \ldots, x_n)}{\sqrt{\pm \sum g_{ik} x_i' x_k'}}. \tag{11}$$

oder für F, wenn man noch den Faktor σ in die g_{ik} hineinnimmt:

$$F = \sqrt{\pm \sum g_{ik} x_i' x_k'}, \tag{27}$$

w. z. b. w. Für die Determinante der g_{ik} ergibt sich durch eine kle Rechnung der Wert $F^{n+1} \cdot \Phi$. Nach unseren Voraussetzungen darf a diese Determinante nicht identisch verschwinden. Die Transversalitä bedingung (26) wird jetzt tatsächlich symmetrisch:

$$\sum F_{ik} x_i' \delta x_k = 0. \tag{42}$$

Wenn $n = 2$ ist, gibt es noch andere Variationsprobleme mit sy metrischer Transversalität[8]).

Hamburg, zu Weihnachten 1919.

---

[8]) J. Radon, Über eine besondere Art ebener konvexer Kurven, Leipzi Berichte, **68** (1916), S. 123–128.

Zusatz bei der Korrektur. Wie ich aus dem letzterschienenen Hefte Rendiconti des circolo matematico di Palermo [**43** (1919), Fondamenti di geome projettivo-differenziale, S. 1–46] ersehe, hat Herr G. Fubini während des Krie eine Reihe von Arbeiten über projektive Differentialgeometrie der Flächen hera gegeben [vgl. die Zusammenstellung ebenda S. 3]. Diese Schriften Fubinis ha zahlreiche Berührungspunkte mit den der vorliegenden Arbeit vorausgegangenen handlungen über affine Geometrie in den Leipziger Berichten **68** (1916) – **71** (19

(Eingegangen am 30. Dezember 1919.)

Über besondere Jacobische Polynome.

Von

Lothar Koschmieder in Breslau.

In meiner Habilitationsschrift[1]) ist die Differentialgleichung

1) $$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2\alpha x\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0$$

ehandelt, in der α eine beliebige positive Konstante ist. Ihre einzigen uf der Strecke von $x=0$ bis $x=+1$ endlichen und stetigen Integrale, ie die Randbedingungen

(2a) $y(0)=0$, (2b) $y'(0)=0$

rfüllen, kommen für die Werte

3) $$\lambda = \lambda_n = n(2\alpha+n-1)$$

es Parameters λ zustande, wo

3a) $n=2m+1$, (3b) $n=2m$ $(m=0,1,2,\ldots)$

t; diese Integrale sind die besonderen Jacobischen Polynome (a) un-eraden, (b) geraden Grades:

4a) $y_{2n+1} = V_{2n+1}(x,\alpha)$, (4b) $y_{2n} = V_{2n}(x,\alpha)$.

ie sind Eigenfunktionen einer Greenschen Funktion, der im abgeschlossenen rundgebiete mit ihrer Ableitung endlichen Lösung der Differentialgleichung

5a) $$(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2} - 2\alpha x\frac{dz}{dx} = 0,$$

5b) $$(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2} - 2\alpha x\frac{dz}{dx} - 2c_0^2 = 0,$$

$$c_0^2 = 2\int_0^1 p(x)\,dx = \frac{2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)^2}{\Gamma(2\alpha)}, \qquad p(x) = (1-x^2)^{\alpha-1},$$

[1]) Untersuchungen über Jacobische Polynome, Breslau 1919 (Trewendt u. Granier). ie Arbeit wird im folgenden mit H. angeführt.

die den Randbedingungen genügt und selbst im Grundgebiete stetig ist während ihre Ableitung an der Stelle $x = \xi$ in einer durch die Formel

$$\left[(1-x^2)\,p(x)\,\frac{dz}{dx}\right]_{\xi+0}^{\xi-0} = 1 \tag{6}$$

gekennzeichneten Weise unstetig wird. Diese Greensche Funktion, di im „ausgearteten" Falle (b) noch der Beziehung

$$\int_0^1 p(x)\,z(x)\,dx = 0 \tag{7b}$$

genügt, wird, je nachdem ob der Fall (a) oder (b) vorliegt, durch fo gende Formeln dargestellt:

$$x < \xi, \qquad G(x,\xi) = \int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^\alpha}, \tag{8a}$$

$$\begin{aligned} x < \xi, \quad G(x,\xi) = 2c_0^2 \Big\{ & \int_0^x \frac{1}{(1-t^2)^\alpha} \int_0^t (1-s^2)^{\alpha-1}\,ds\,dt \\ & - \int_0^\xi \frac{dt}{(1-t^2)^\alpha} \int_\xi^1 (1-t^2)^{\alpha-1}\,dt + \int_\xi^1 (1-t^2)^{\alpha-1} \int_0^t \frac{ds}{(1-s^2)^\alpha}\,dt \\ & - 2c_0^2 \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-1} \int_0^t \frac{1}{(1-s^2)^\alpha} \int_0^s (1-r^2)^{\alpha-1}\,dr\,ds\,dt \Big\}; \end{aligned} \tag{8b}$$

wegen der leicht zu erweisenden Symmetrieeigenschaft $G(x,\xi) = G(\xi,x$ genügt es, den für $x < \xi$ geltenden Ausdruck anzuschreiben. Mit diese Kernen genügen die Eigenfunktionen den Integralgleichungen

$$V_{2n+1}(\xi) = \lambda_{2n+1} \int_0^1 p(x)\,G(x,\xi)\,V_{2n+1}(x)\,dx, \tag{9a}$$

$$V_{2n}(\xi) = \lambda_{2n} \int_0^1 p(x)\,G(x,\xi)\,V_{2n}(x)\,dx, \qquad (n = 1, 2, \ldots \tag{9b}$$

$$0 = \int_0^1 p(x)\,G(x,\xi)\,V_0(x)\,dx.$$

Die Orthogonalitätseigenschaft

$$\int_0^1 p(x)\,y_m(x)\,y_n(x)\,dx = 0 \tag{10}$$

macht jedes der Funktionensysteme (a), (b) zur Entwicklung willkürliche Funktionen geeignet. Ist $f(x)$ eine mit ihren drei ersten Ableitunge stückweise stetige Funktion, so gelten die Entwicklungen

11a) $$f(x)=\sum_{n}^{0,\infty} V_{2n+1}(x)\int_0^1 p(\xi)\,f(\xi)\,V_{2n+1}(\xi)\,d\xi,$$

11b) $$f(x)=\sum_{n}^{0,\infty} V_{2n}(x)\int_0^1 p(\xi)\,f(\xi)\,V_{2n}(\xi)\,d\xi,$$

enn die Eigenfunktionen normiert sind, d. h. $\int_0^1 p(x)\,y_m(x)^2\,dx=1$ ist. ür $\alpha=1$ erhält man so Reihen, die nach Legendreschen Polynomen rtschreiten; für $\alpha=\frac{1}{2}$ Fouriersche Reihen, indem dann bei der Sub- itution $x=\cos\varphi$ das Jacobische Polynom $V_n(x,\frac{1}{2})$ mit $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos n\varphi$ bereinstimmt. Auch die Fälle $\alpha=\frac{1}{3}$, $\alpha=\frac{1}{4}$ scheinen der Beachtung nicht nwert; an Stelle der eben angeführten trigonometrischen Substitution itt dann eine elliptische, und es ergibt sich die bemerkenswerte Ent- icklung willkürlicher Funktionen nach gewissen elliptischen Funktionen. n Falle $\alpha=\frac{1}{4}$ führt man lemniskatische Funktionen mit dem Werte $=\sqrt{\frac{1}{2}}$ des Jacobischen Moduls ein[2]); den Fall $\alpha=\frac{1}{8}$ behandelt man it Hilfe der Weierstraßschen äquianharmonischen elliptischen Funktionen it dem Invariantenwerte $g_2=0$, wie im folgenden ausgeführt wird.

§ 1.

Einführung der elliptischen Funktionen.

In der Differentialgleichung (1), die für $\alpha=\frac{1}{3}$ lautet

12) $$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2}{3}x\frac{dy}{dx}+\lambda_n y=0,\qquad \lambda_n=n\left(n-\frac{1}{3}\right),$$

tzen wir

13) $$x=\wp'(u;0,-1),$$
$$\wp'u^2=4\wp u^3+1,\quad g_2=0,\quad g_3=-1,$$
$$1-x^2=-4\wp u^3,\quad dx=\wp''u\,du=6\wp u^2\,du.$$

ird dann $y(x)$ als Funktion von u mit $\varphi(u)$ bezeichnet, so erhält (12) e Form

14) $$\frac{1}{\wp u}\frac{d^2\varphi(u)}{du^2}-\frac{\wp' u}{\wp u^2}\frac{d\varphi(u)}{du}-9\lambda_n\varphi(u)=0,$$
$$\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\wp u}\frac{d\varphi(u)}{du}\right)-9\lambda_n\varphi(u)=0.$$

ie äquianharmonische $\wp$-Funktion hat eine angebbare Nullstelle

15) $$u_0=\frac{2\omega}{3},$$

[2]) H. § 10.

wenn

$$2\omega = 2\int_{e_2}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}}, \qquad e_2 = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

ihre reelle Periode ist. Denn[3]) bedeutet α eine dritte Einheitswurzel, s ist einerseits nach der Homogenitätseigenschaft der $\wp$-Funktion

$$\wp(\alpha u; 0, g_3) = \alpha \wp(u; 0, g_3),$$

$$\wp \frac{2\alpha\omega}{3} = \alpha \wp \frac{2\omega}{3}. \tag{16a}$$

Andererseits ist

$$\wp \frac{4\alpha\omega}{3} = \wp\left(-\frac{2\omega}{3} + \frac{2i\omega}{\sqrt{3}}\right),$$

also, da im Falle $g_2 = 0$, $g_3 < 0$

$$2\omega' = \frac{2i\omega}{\sqrt{3}} \tag{17}$$

eine Periode der $\wp$-Funktion ist[4]),

$$\wp \frac{4\alpha\omega}{3} = \wp \frac{4\omega}{3}. \tag{16b}$$

Die Tatsachen (16a) und (16b) sind miteinander nur verträglich, wenn

$$\wp \frac{2\omega}{3} = \wp \frac{2\alpha\omega}{3} = \wp \frac{4\alpha\omega}{3} = 0 \tag{18}$$

ist.

Dem Grundgebiet von 0 bis 1 in der Veränderlichen x entspric der Wertbereich

$$\omega \leqq u \leqq \frac{4\omega}{3} \tag{19}$$

Die Orthogonalitätseigenschaft (10) hat die Gestalt

$$\int_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} \varphi_m(u)\, \varphi_n(u)\, du = 0, \qquad m \neq n. \tag{20}$$

Wird in (9) auch das zweite Argument ξ durch ein anderes erset mit dem Ansatze

$$\xi = \wp' v, \tag{13a}$$

wird ferner das Ergebnis der Einführung von u, v statt x, ξ in $G(x,$ mit $\Gamma(u, v)$ bezeichnet und schließlich

$$\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}\Gamma(u, v) = \mathsf{K}(u, v)$$

---

[3]) H. Weber, Lehrbuch der Algebra, 3, Braunschweig 1908, S. 571.
[4]) G.-H. Halphen, Traité des fonctions elliptiques, 1, Paris 1886, S. 84.

esetzt, so lautet die Integralgleichung

$$21) \qquad \varphi_n(v) = \lambda_n \int_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} \mathsf{K}(u,v)\, \varphi_n(u)\, du.$$

§ 2.

Berechnung der Kerne.

Für den Kern im Falle (a) erhält man, da (vgl. (8a))

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt[3]{1-t^2}} = -\frac{6}{\sqrt[3]{4}} \int_{\omega}^{u} \wp w\, dw = \frac{6}{\sqrt[3]{4}} (\zeta u - \eta),$$

$$22) \qquad u < v, \quad \mathsf{K}(u,v) = 9(\zeta u - \eta),$$

$$u > v, \quad \mathsf{K}(u,v) = 9(\zeta v - \eta),$$

enn wie üblich $\frac{\sigma' u}{\sigma u} = \zeta u$, $\eta = \zeta\omega$ gesetzt ist.

Setzt man in (8b)

$$t = \wp'\lambda, \quad \frac{dt}{(1-t^2)^{\alpha}} = -\frac{6}{\sqrt[3]{4}} \wp\lambda\, d\lambda, \quad (1-t^2)^{\alpha-1} dt = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2} d\lambda,$$

o ergibt sich

$$23) \quad \frac{1}{18 c_0^2} \Gamma(u,v) = -\int_{\omega}^{u} \wp\lambda\, d\lambda \int_{\omega}^{\lambda} d\mu + \int_{\omega}^{v} \wp\lambda\, d\lambda \int_{v}^{\frac{4\omega}{3}} d\lambda - \int_{v}^{\frac{4\omega}{3}} d\lambda \int_{\omega}^{\lambda} \wp\mu\, d\mu$$

$$+ 3 c_0^2 \sqrt[3]{4} \int_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} d\lambda \int_{\omega}^{\lambda} \wp\mu\, d\mu \int_{\omega}^{\mu} dv.$$

Die vier Summanden auf der rechten Seite von (23) haben folgende Verte. Erstens ist

$$24_1) \qquad -\int_{\omega}^{u} \lambda \wp\lambda\, d\lambda + \omega \int_{\omega}^{u} \wp\lambda\, d\lambda = \lambda\zeta\lambda\Big|_{\omega}^{u} - \int_{\omega}^{u} \zeta\lambda\, d\lambda - \omega(\zeta u - \eta)$$

$$= (u-\omega)\zeta u - \lg\frac{\sigma u}{\sigma\omega},$$

weitens

$$24_2) \qquad \int_{\omega}^{v} \wp\lambda\, d\lambda \int_{v}^{\frac{4\omega}{3}} d\lambda = -(\zeta v - \eta)\left(\frac{4\omega}{3} - v\right),$$

rittens

$$24_3) \qquad \int_{v}^{\frac{4\omega}{3}} (\zeta\lambda - \eta)\, d\lambda = \lg\frac{\sigma\frac{4\omega}{3}}{\sigma v} - \eta\left(\frac{4\omega}{3} - v\right),$$

viertens

$$(24_4)\quad \int_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} d\lambda \int_{\omega}^{\lambda} -(\mu-\omega)\,\wp\mu\,d\mu = \int_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} d\lambda \Big[\mu\zeta\mu\Big|_{\omega}^{\lambda} - \int_{\omega}^{\lambda} \zeta\mu\,d\mu - \omega(\zeta\lambda-\eta)\Big]$$

$$= \int_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} \Big[\lambda\zeta\lambda - \lg\frac{\sigma\lambda}{\sigma\omega} - \omega\zeta\lambda\Big]\,d\lambda = \lambda\lg\sigma\lambda\Big|_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} - 2\int_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} \lg\sigma\lambda\,d\lambda$$

$$= \frac{\omega}{3}\lg\sigma\omega\,\sigma\frac{4\omega}{3} - 2\int_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} \lg\sigma\lambda\,d\lambda.$$

Nun liefert die „Taschenausgabe“

$$\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma u^2\,\sigma v^2} = \wp v - \wp u$$

für $u=\omega$, $v=\frac{4\omega}{3}$, bzw. für $u=\frac{2\omega}{3}$, $v=\frac{\omega}{3}$, weil $\wp\frac{2\omega}{3}$ und $\wp\frac{4\omega}{3}$ ver-
schwinden, die beiden Formeln

$$(25)\qquad \frac{\sigma\left(2\omega+\frac{\omega}{3}\right)\sigma\frac{\omega}{3}}{\sigma\omega^2\,\sigma\frac{4\omega}{3}^2} = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \qquad \frac{\sigma\omega}{\sigma\frac{\omega}{3}\,\sigma\left(2\omega-\frac{4\omega}{3}\right)^2} = \wp\frac{\omega}{3};$$

benutzt man die Formeln

$$\sigma(2\omega+u) = -e^{2\eta(u+\omega)}\,\sigma u, \qquad \sigma(2\omega-u) = e^{-2\eta(u-\omega)}\,\sigma u$$

für $u=\frac{\omega}{3}$ bzw. $u=\frac{4\omega}{3}$, ferner die Tatsache, daß

$$\wp\frac{\omega}{3} = \wp\left(\omega-\frac{2\omega}{3}\right) = \wp\left(\frac{2\omega}{3}+\omega\right) = e_2 + \frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{\wp\frac{2\omega}{3}-e_2} = \sqrt[3]{2}$$

ist, so können die Gleichungen (25) geschrieben werden

$$\frac{e^{\frac{8\eta\omega}{3}}\,\sigma\frac{\omega}{3}^2}{\sigma\omega^2\,\sigma\frac{4\omega}{3}^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \qquad \frac{e^{\frac{4\eta\omega}{3}}\,\sigma\omega}{\sigma\frac{\omega}{3}\,\sigma\frac{4\omega}{3}^2} = \sqrt[3]{2}.$$

Aus ihnen ergibt sich

$$(26)\qquad \lg\sigma\frac{4\omega}{3} = \frac{8\eta\omega}{9}.$$

Ferner ist

$$\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sqrt[4]{e_2-e_1} = \frac{e^{\frac{1}{3}\eta\omega}}{\sigma\omega},$$

7) $$\lg \sigma\omega = \frac{1}{2}\eta\omega - \frac{1}{4}\lg\frac{3}{2\sqrt[3]{2}},$$

o wird (24_4)

$$\int_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} d\lambda \int_{\omega}^{\lambda} -(\mu-\omega)\wp\mu\, d\mu = \frac{\omega}{3}\left(\frac{25}{18}\eta\omega - \frac{1}{4}\lg 3 + \frac{1}{3}\lg 2\right) - 2\int_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} \lg\sigma\lambda\, d\lambda.$$

ın ist

8) $$\eta\omega = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}\ ^5);$$

nn setzt man in der für $g_2 = 0$ geltenden Formel

$$i\sqrt{3}\,\zeta(iu\sqrt{3}) = 3\zeta u + \frac{\wp' u}{\wp u}$$

$= \omega'$, so erhält man mit Berücksichtigung von (17)

$$\eta_2 = i\sqrt{3}\,\eta_2',$$

daß die Legendresche Relation

$$\eta\omega' - \eta'\omega = i\pi$$

so lautet sie für negative Diskriminante — die Beziehung (28) ergibt.
e Benutzung der Formeln (24) bis (28) liefert, da

9) $$\frac{1}{c_{\mathfrak{n}}^2} = 2\int_0^1 (1-t^3)^{\alpha-1}\, dt = 3\sqrt[3]{4}\int_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} d\lambda = \sqrt[3]{4}\,\omega$$

, für den Kern (23)

$$u < v, \quad \mathsf{K}(u,v) = \frac{27}{\omega}(u\zeta u + v\zeta v - \lg\sigma u\,\sigma v) - 27\zeta u - 36\zeta v + \frac{162}{\omega^2}\int_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} \lg\sigma w\, dw,$$

0)

$$u > v, \quad \mathsf{K}(u,v) = \frac{27}{\omega}(u\zeta u + v\zeta v - \lg\sigma u\,\sigma v) - 27\zeta v - 36\zeta u + \frac{162}{\omega^2}\int_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} \lg\sigma w\, dw.$$

---

5) Vgl. die entsprechende Entwicklung für $g_3 > 0$ bei Halphen a. a. O. S. 82ff., 281ff.; desgl. bei A. G. Greenhill, The applications of elliptic functions, London 92, S. 315f.

§ 3.

Darstellung der Eigenfunktionen.

Nachdem wir in den Formeln (22) und (30) für $\alpha = \frac{1}{3}$ die zu de Aufgaben (1), (2a) und (1), (2b) gehörigen Kerne hergestellt habe entwickeln wir mit Hilfe der elliptischen Funktionen eine zweite For der Eigenfunktionen, die mit $T_n(x)$ bezeichnet seien, wenn der Koeffizie der höchsten Potenz von x die Einheit ist.

Dazu erinnern wir an den einfacheren Fall

$$\alpha = \frac{1}{2};$$

bei diesem geht die Jacobische Differentialgleichung

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0$$

durch die Substitution

$$x = \cos\varphi, \quad \frac{\pi}{2} \geqq \varphi \geqq 0$$

in die Form über

$$\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} + n^2\psi = 0,$$

wenn $y(x)$ als Funktion von φ mit $\psi(\varphi)$ bezeichnet wird. Damit d Wert der Ableitung

$$y'(1) = \frac{d\psi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}\Big|^{\varphi=0} = -\frac{1}{\sin\varphi}\frac{d\psi}{d\varphi}\Big|^{\varphi=0}$$

endlich ausfalle, ist als partikuläres Integral der letzten Differentialgleichun die Größe

$$\psi(\varphi) = \cos n\varphi$$

zu wählen. Man hat aber für ψ noch eine zweite Darstellung, d Jacobische Polynom für $y(x)$; da die Entwicklung von $\cos n\varphi$ na fallenden Potenzen von $\cos\varphi$ mit dem Gliede $2^{n-1}\cos\varphi^n$ beginnt, i wie bekannt,

$$(31) \qquad \frac{(-1)^n}{n(n+1)\dots(2n-1)}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n \arccos x).$$

Die Eigenfunktionen, ursprünglich besondere Jacobische Polynor $T_n(x, \frac{1}{2})$, haben noch einen zweiten einfachen Ausdruck: sie sind f $x = \cos\varphi$ bis auf einen konstanten Faktor die Kosinus der Vielfach von φ.

Die Größen $T_n(x, \frac{1}{3})$ sind zunächst als Polynome der Funktion $= \wp' u$ erschienen und daher für gerades n als Polynome von $\wp u$, für gerades n als Polynome von $\wp u$ multipliziert mit $\wp' u$ darstellbar. Wie Potenzen der trigonometrischen Funktionen durch die Funktionen der lfachen des Arguments, lassen sich auch die Potenzen der elliptischen nktion $\wp u$ linear durch Grundelemente ausdrücken; diese sind nicht Funktionen der Vielfachen des Arguments, sondern die Ableitungen $^{n)}(u)$ der Funktion $\wp u$, die freilich nicht zueinander orthogonal sind.

Eisenstein hat die Gesetzmäßigkeit der Koeffizienten in der Entcklung der Potenzen einer elliptischen Funktion nach Grundelementen den Fällen eines biquadratischen Radikanden des elliptischen Differentials gegeben, besonders im lemniskatischen Falle[6]). Wir haben jetzt die n Eisensteinschen Formeln entsprechenden für die äquianharmonische Funktion herzuleiten.

Im folgenden setzen wir zunächst eine $\wp$-Funktion mit beliebigen varianten voraus, die an der Stelle u_0 verschwinde. Sind ihre zweite variante g_3 und ihre Diskriminante $\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$ negativ — wie es i der besonderen $\wp$-Funktion (13) der Fall ist —, so gibt es einen llen Wert u_0, denn $\wp u$ nimmt dann für reelle Werte von u alle llen Werte zwischen $+\infty$ und der negativen Größe e_2 an.

In der Formel

$$2) \qquad \zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta u = \frac{\wp' u}{\wp u - \wp v}$$

twickeln wir die beiden ersten Summanden links nach dem Taylorschen hrsatze:

$$\zeta(u+v) = \zeta u + v\zeta' u + \frac{v^2}{2!}\zeta'' u + \frac{v^3}{3!}\zeta''' u + \frac{v^4}{4!}\zeta^{IV} u + \ldots,$$

$$\zeta(u-v) = \zeta u - v\zeta' u + \frac{v^2}{2!}\zeta'' u - \frac{v^3}{3!}\zeta''' u + \frac{v^4}{4!}\zeta^{IV} u - \ldots,$$

d erhalten durch Addition, da $\zeta^{(n)} u = -\wp^{(n-1)} u$,

$$3) \qquad \zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta u = -2\left(\frac{v^2}{2!}\wp' u + \frac{v^4}{4!}\wp''' u + \frac{v^6}{6!}\wp^V u + \ldots\right).$$

Ersetzt man die linke Seite von (32) durch die rechte von (33) und tegriert dann (32) nach u von u_0 an bis zum Werte u, so findet man

$$4) \qquad \lg(\wp u - \wp v) - \lg(-\wp v) = \lg\left(1 - \frac{\wp u}{\wp v}\right)$$

$$= -2\left[\frac{v^2}{2!}\wp u + \frac{v^4}{4!}(\wp'' u - \mathfrak{p}_2) + \frac{v^6}{6!}(\wp^{IV} u - \mathfrak{p}_4) + \ldots\right],$$

[6]) Mathematische Abhandlungen, Berlin 1847, S. 146.

wobei

$$\mathfrak{p}_{2n} = \wp^{(2n)} u_0 \tag{35}$$

gesetzt ist. Man kommt zu dem gewünschten Ergebnisse, indem man (34) links den Logarithmus, rechts die geraden Potenzen von v jeweils nach fallenden Potenzen von $\wp v$ entwickelt und dann die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von $\wp v$ beiderseits gleichsetzt.

Es ist

$$v = \int_{\wp v}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = \int_0^{\frac{1}{\wp v}} \frac{1}{2\sqrt{t}} \left(1 - \frac{g_2 t^2 + g_3 t^3}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\wp v}} \frac{1}{2\sqrt{t}} \left[1 + \frac{1}{2}\frac{g_2 t^2 + g_3 t^3}{4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{g_2 t^2 + g_3 t^3}{4}\right)^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{g_2 t^2 + g_3 t^3}{4}\right)^3 + \ldots\right] dt$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\wp v}} + * + \varrho_2 \frac{1}{\sqrt{\wp v^5}} + \varrho_3 \frac{1}{\sqrt{\wp v^7}} + \ldots, \tag{36}$$

wobei der Stern die Lücke in der Entwicklung andeuten soll; die ϱ sind Polynome der Invarianten. Es folgt

$$v^{2n} = \frac{1}{\wp v^n} + * + \frac{R_{n+2}^{(n)}}{\wp v^{n+2}} + \frac{R_{n+3}^{(n)}}{\wp v^{n+3}} + \ldots, \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{37}$$

Nach dem Taylorschen Lehrsatze ist

$$R_{n+k}^{(n)} = \frac{1}{(n+k)!} \frac{d^{n+k}(v^{2n})}{\left(d\frac{1}{\wp v}\right)^{n+k}}\Bigg|^{v=0}; \tag{38}$$

für alle n gilt

$$R_n^{(n)} = 1, \quad R_{n+1}^{(n)} = 0.$$

Die Einsetzung von (37) in (34) und die Entwicklung des Logarithmus (34) ergibt

$$2\sum_n^{1,\infty} \frac{1}{(2n)!}\left(\wp^{(2n-2)} u - \mathfrak{p}_{2n-2}\right) \sum_k^{0,\infty} \frac{R_{n+k}^{(n)}}{\wp v^{n+k}} = \sum_k^{1,\infty} \frac{\wp u^k}{k \wp v^k},$$

ferner die Umordnung der linksstehenden Summe

$$2\sum_k^{1,\infty} \frac{1}{\wp v^k} \sum_n^{1,k} \frac{1}{(2n)!} R_k^{(n)} \left(\wp^{(2n-2)} u - \mathfrak{p}_{2n-2}\right) = \sum_k^{1,\infty} \frac{\wp u^k}{k \wp v^k};$$

jetzt liefert die oben gekennzeichnete Koeffizientenvergleichung

$$\wp u^k = \frac{2}{(k-1)!} \sum_n^{1,k} \frac{1}{(2n)!} \frac{d^k(u^{2n})}{\left(d\frac{1}{\wp u}\right)^k}\Bigg|^{u=0} \left(\wp^{(2n-2)} u - \mathfrak{p}_{2n-2}\right). \tag{39}$$

ie Herleitung dieser Formel, die ich an anderem Orte nicht gefunden abe[7]), ist der Entwickelung von Jacobi[8]) für die k-te Potenz der Funkon sin am u nachgebildet.

In unserm äquianharmonischen Falle (13) tritt folgende Vereinfachung n. Es sei bis zu einem bestimmten n bewiesen, daß

$$\wp^{(6n)} = a_1 \wp^{3n+1} + a_2 \wp^{3n-2} + \ldots + a_{n+1} \wp \tag{40a}$$

t mit lauter positiven, von Null verschiedenen Koeffizienten a_m; der ürze halber ist das Argument u von $\wp u$ nicht mitgeschrieben. Der nsatz (40a) ist für kleine n richtig, denn aus

$$\wp'^2 = 4\wp^3 + 1$$

lgert man durch fortgesetzte Differentiation

$$\wp'' = 6\wp^2, \quad \wp''' = 12\wp\wp',$$

$$\wp^{IV} = 12(10\wp^3 + 1), \quad \wp^V = 360\wp^2\wp', \quad \wp^{VI} = 720(7\wp^4 + \wp),$$

$$\wp^{VII} = 720\wp'(28\wp^3 + 1), \quad \wp^{VIII} = 12960(28\wp^5 + 5\wp^2),$$

$$\wp^{IX} = 129600\wp'(14\wp^4 + \wp), \quad \wp^X = 129600(308\wp^6 + 66\wp^3 + 1),$$

$$\wp^{XI} = 8553600\wp'(28\wp^5 + 3\wp^2), \quad \wp^{XII} = 17107200(364\wp^7 + 91\wp^4 + 3\wp),$$

. . . . . .

st $s = \wp u$ und ψ eine beliebige Funktion von s, so ist

$$\frac{d^2\psi}{du^2} = (4s^3 + 1)\frac{d^2\psi}{ds^2} + 6s^2\frac{d\psi}{ds}. \tag{41}$$

it Hilfe dieser Formel erhält man aus (40a)

$$\wp^{(6n+2)} = (4\wp^3 + 1)$$

$$(3n+1)\cdot 3n a_1 \wp^{3n-1} + (3n-2)(3n-3)a_2\wp^{3n-4} + \ldots + 4\cdot 3 a_n \wp^2]$$

$$+ 6\wp^2[(3n+1)a_1\wp^{3n} + (3n-2)a_2\wp^{3n-3} + \ldots + a_{n+1}],$$

$$\wp^{(6n+2)} = b_1\wp^{3n+2} + b_2\wp^{3n-1} + \ldots + b_{n+1}\wp^2, \tag{40b}$$

o die b_m zufolge der Annahme über die a_m in (40a) wieder lauter esentlich positive Koeffizienten sind. Zwei weitere Anwendungen der ormel (41) ergeben

$$\wp^{(6n+4)} = c_1\wp^{3n+3} + c_2\wp^{3n} + \ldots + c_{n+1}\wp^3 + c_{n+2},$$

$$\wp^{(6n+6)} = d_1\wp^{3n+4} + d_2\wp^{3n+1} + \ldots + d_{n+2}\wp \tag{40c}$$

it wiederum lauter wesentlich positiven Koeffizienten c_m, d_m und erisen die Richtigkeit des Ansatzes (40).

---

[7]) Vgl. z. B. Halphen, a. a. O., S. 203f.

[8]) Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, Regiom. 1829, § 45.

Aus (40a) und (40b) folgt, daß im äquianharmonischen Falle (1 die Vereinfachung

$$\wp^{(6n)} u_0 = \mathfrak{p}_{6n} = \wp^{(6n+2)} u_0 = \mathfrak{p}_{6n+2} = 0 \tag{42}$$

statthat. Da im selben Falle in der Entwickelung (36) von v

$$\varrho_{3j+1} = \varrho_{3j+2} = 0 \tag{43}$$

und in (37)

$$R^{(n)}_{n+3j+1} = R^{(n)}_{n+3j+2} = 0 \tag{44}$$

ist, fallen in der Summe (39) alle Glieder weg, bei denen $k - n$ nic durch 3 teilbar ist, und man erhält mit Berücksichtigung von (42)

$$\wp u^{3l+1} = \frac{2}{(3l)!} \sum_{n}^{0,l} \frac{1}{(6n+2)!} \frac{d^{3l+1}(u^{6n+2})}{\left(d\frac{1}{\wp u}\right)^{3l+1}} \Bigg|^{u=0} \wp^{(6n)} u, \tag{45}$$

$$\wp u^{3l+2} = \frac{2}{(3l+1)!} \sum_{n}^{0,l} \frac{1}{(6n+4)!} \frac{d^{3l+2}(u^{6n+4})}{\left(d\frac{1}{\wp u}\right)^{3l+2}} \Bigg|^{u=0} \wp^{(6n+2)} u. \tag{46}$$

Um den Wert der in der entsprechenden Entwickelung von $\wp u^{3l}$ weg der nicht verschwindenden Größen $\mathfrak{p}_{6n+4}$ auftretenden Konstanten zu b stimmen, setzt man in (41) $\psi = s^{3\mu-1}$, wo μ eine positive ganze Z ist, und bekommt

$$s^{3\mu} = -\frac{3\mu-2}{2(6\mu-1)} s^{3\mu-3} + \frac{1}{2(3\mu-1)(6\mu-1)} \frac{d^2(s^{3\mu-1})}{du^2}.$$

Da hiernach

$$s^3 = -\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{20}\frac{d^2(s^2)}{du^2} = -\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{120}\frac{d^4 s}{du^4}$$

ist, ergibt sich für die genannte Konstante

$$-\frac{2}{(3l-1)!} \sum_{n}^{1,l} \frac{1}{(6n)!} \frac{d^{3l}(u^{6n})}{\left(d\frac{1}{\wp u}\right)^{3l}} \Bigg|^{u=0} \mathfrak{p}_{6n-2} = (-1)^l \frac{1}{2^l} \frac{1\cdot 4\cdot \ldots \cdot (3l-2)}{5\cdot 11\cdot \ldots \cdot (6l-1)} \tag{47}$$

und es wird

$$\wp u^{3l} = \frac{2}{(3l-1)!} \sum_{n}^{1,l} \frac{1}{(6n)!} \frac{d^{3l}(u^{6n})}{\left(d\frac{1}{\wp u}\right)^{3l}} \Bigg|^{u=0} \wp^{(6n-2)} u + (-1)^l \frac{1}{2^l} \frac{1\cdot 4\cdot \ldots \cdot (3 \tag{48}$$

In den Formeln (45), (46), (48) sind die den genannten Eisenstei schen Formeln entsprechenden gewonnen.

Um nach dieser Vorbereitung den zweiten Ausdruck für die Eig funktionen des Kernes (22) zu finden, gehen wir von der Formel H. § 3 (5 aus, die für $\alpha = \frac{1}{3}$ gibt

$$T_{2n+1}\left(x, \frac{1}{3}\right) = 2^n \frac{1\cdot 4\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{(6n+5)(6n+11)\ldots(12n-1)} x F\left(-n, n+\frac{5}{6}, \frac{1}{3}, 1-x\right.$$

ndem man mit (13)

$$x = \wp' u = \wp', \quad 1 - x^2 = 1 - \wp'^2 = -4\wp^3$$

ie elliptischen Funktionen einführt, wird

$$T_{2n+1}(\wp')$$

$$= \frac{1\cdot 4\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{(6n+5)(6n+11)\ldots(12n-1)} \sum_k^{0,n} \binom{n}{k} 2^k \frac{(6n+5)(6n+11)\ldots(6n+6k-1)}{1\cdot 4\cdot \ldots \cdot (3k-2)} \wp^{3k}\wp'.$$

Hierin ersetzt man die Größe

$$\wp^{3k}\wp' = \frac{1}{3k+1}\frac{d(\wp^{3k+1})}{du}$$

durch ihren aus (45) durch Differentiation folgenden Wert und erhält

$$T_{2n+1}(\wp')$$

$$= \frac{1\cdot 4\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{(6n+5)(6n+11)\ldots(12n-1)} \sum_k^{0,n} \binom{n}{k} 2^{k+1} \frac{(6n+5)(6n+11)\ldots(6n+6k-1)}{1\cdot 4\cdot \ldots \cdot (3k-2)} \frac{1}{(3k+1)!} \cdot$$

$$\sum_l^{0,k} \frac{1}{(6l+2)!} \frac{d^{3k+1}(u^{6l+2})}{\left(d\frac{1}{\wp u}\right)^{3k+1}}\Bigg|^{u=0} \wp^{(6l+1)u}$$

oder durch Umordnung

(49) $$T_{2n+1}(\wp') = 2^n \frac{1\cdot 4\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{(6n+5)(6n+11)\ldots(12n-1)} \sum_k^{0,n} \frac{\wp^{(6k+1)u}}{(6k+2)!} \cdot$$

$$\cdot \sum_l^{k,n} \frac{1}{(3l+1)!} \binom{n}{l} 2^{l+1} \frac{(6n+5)(6n+11)\ldots(6n+6l-1)}{1\cdot 4\cdot \ldots \cdot (3l-2)} \frac{d^{3l+1}(u^{6k+2})}{\left(d\frac{1}{\wp u}\right)^{3l+1}}\Bigg|^{u=0}.$$

Schreibt man für $\wp'$ wieder x und setzt demgemäß

$$u = \arg \wp' x,$$

so erhält man auf Grund von H. § 3, (2)

$$\frac{-3^{2n+1}}{(6n+2)(6n+5)\ldots(12n+2)}(1-x^2)^{\frac{1}{3}}\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\left[(1-x^2)^{2n+\frac{1}{3}}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{4}} 2^n \frac{1\cdot 4\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{(6n+5)(6n+11)\ldots(12n-1)} \sum_k^{0,n} \frac{1}{(6k+2)!} \frac{d^{6k}x}{(d\arg \wp' x)^{6k}} \cdot$$

$$\cdot \sum_l^{k,n} \frac{1}{(3l+1)!} \binom{n}{l} \left(-\frac{1}{2}\right)^{l-1} \frac{(6n+5)(6n+11)\ldots(6n+6l-1)}{1\cdot 4\cdot \ldots \cdot (3l-2)} \frac{d^{3l+1}\left[(\arg \wp' x)^{6k+2}\right]}{\left(d\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}\right)^{3l+1}}\Bigg|^{x=\infty}$$

Diese Formel entspricht der Gleichung (31) für ungerade $m = 2n+1$.

Für gerade $m = 2n$ findet man aus H. § 3 (5b)

$$T_{2n}\left(x, \frac{1}{3}\right) = 2^n \frac{1 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{(6n-1)(6n+5)\ldots(12n-7)} F\left(-n, n-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, 1-x^2\right.$$

und durch Einführung der elliptischen Funktionen gemäß (13)

$$T_{2n}(\wp')$$

$$= 2^n \frac{1 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{(6n-1)(6n+5)\ldots(12n-7)} \sum_k^{0,n} \binom{n}{k} 2^k \frac{(6n-1)(6n+5)\ldots(6n+6k-7)}{1 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3k-2)} \wp^3$$

Die Benutzung von (48) ergibt nach Umordnung der Summe

$$(51) \quad T_{2n}(\wp') = 2^n \frac{1 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{(6n-1)(6n+5)\ldots(12n-7)} \left\{ \sum_k^{1,n} \frac{\wp^{(6k-2)} u}{(6k)!} \cdot \right.$$

$$\sum_l^{k,n} \frac{1}{(3l-1)!} \binom{n}{l} 2^{l+1} \frac{(6n-1)(6n+5)\ldots(6n+6l-7)}{1 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3l-2)} \frac{d^{3l}(u^{6k})}{\left(d\frac{1}{\wp u}\right)^{3l}} \Bigg|^{u=}$$

$$\left. + \sum_k^{0,n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(6n-1)(6n+5)\ldots(6n+6k-7)}{5 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (6k-1)} \right\}.$$

Nun ist

$$\sum_k^{0,n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(6n-1)(6n+5)\ldots(6n+6k-7)}{5 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (6k-1)} = F\left(-n, n-\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, x\right) \Big|^{x=}$$

Die Funktion $F(-n, n-\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, x)$ genügt der hypergeometrischen Differentialgleichung

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{5}{6}(1-x)\frac{dy}{dx} + n\left(n-\frac{1}{6}\right)y = 0,$$

die bei Einführung der neuen Veränderlichen $1 - x = z$ die Form erhält

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{5}{6}z\frac{dy}{dz} + n\left(n-\frac{1}{6}\right)y = 0:$$

das ganze rationale Integral dieser Differentialgleichung[9])

$$y = zF(-n+1, n+\tfrac{5}{6}, 2, z) = (1-x)F(-n+1, n+\tfrac{5}{6}, 2, 1-x)$$

kann sich von $F(-n, n-\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, x)$ nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, daher ist der Wert dieser hypergeometrischen Reihe an der Stelle $x = 1$ gleich Null, aus der rechten Seite der Formel (51) verschwindet also die letzte Summe. Zu der Formel (50) tritt noch die folgende

[9]) H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik 2, Braunschweig 1912, S. 23.

$$\frac{3^{2n}}{6n-1)(6n+2)\dots(12n-4)}(1-x^2)^{\frac{2}{3}}\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left[(1-x^2)^{2n-\frac{2}{3}}\right]$$

$$= 2^n\frac{1\cdot 4\cdot\dots\cdot(3n-2)}{(6n-1)(6n+5)\dots(12n-7)}\sum_{k}^{1,n}\frac{1}{(6k)!}\frac{d^{6k-3}x}{(d\arg\varphi' x)^{6k-3}}\cdot$$

$$\sum_{l}^{k.n}\frac{1}{(3l-1)!}\binom{n}{l}(-1)^l\left(\frac{1}{2}\right)^{l-1}\frac{(6n-1)(6n+5)\dots(6n+6l-7)}{1\cdot 4\cdot\dots\cdot(3l-2)}\frac{d^{3l}\left[(\arg\varphi' x)^{6k}\right]}{\left(d\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}\right)^{3l}}\Bigg|^{x=\infty}.$$

(Eingegangen am 5. Januar 1920.)

Ein Satz über Kegelschnitte mit einigen Anwendungen auf die perspektive Affinität.

Von

Fritz Carlson in Upsala.

§ 1.

Wir betrachten ein Büschel Kegelschnitte $\varkappa$ mit den zwei Grundpunkten a, b; die anderen beiden mögen in O zusammenfallen, so daß alle $\varkappa$ eine feste Gerade OH in O berühren. Eine beliebige Gerade schneidet die Kegelschnitte des Büschels in Punktpaaren einer Involution, deren Doppelpunkte von den zwei l berührenden Kegelschnitten $\varkappa$ geliefert werden. Der Schnittpunkt H der Verbindungsgerade ab mit der Tangente in O hat dieselbe Polare $O\Pi$ in bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels; sie liegt zu OH harmonisch bezüglich Oa, Ob. Es seien $\varkappa_s$, $\varkappa_t$ zwei Kegelschnitte im Büschel $\varkappa$ und $\sigma_1\tau_1$, $\sigma_2\tau_2$ die gemeinsamen Tangenten, wo σ_1, σ_2 die Berührungspunkte auf $\varkappa_s$, τ_1, τ_2 die auf $\varkappa_t$ sind. Die Tangenten schneiden sich auf $O\Pi$; es sei Π der Schnittpunkt. Oa, Ob liegen zu $O\sigma_1, O\tau_1$ und zu $O\sigma_2, O\tau_2$ harmonisch; ferner sind $OH, O\Pi$ zu $O\sigma_1, O\tau_1$ und zu $O\tau_1, O\tau_2$ harmonisch konjugiert. Es sei k_0 ein Kegelschnitt, der Oa, Ob in A', B' berührt; die Polare $A'B'$ von O werde mit o bezeichnet. Wir projizieren von O aus die Punkte von $\varkappa_s, \varkappa_t$ auf k_0 und auf o. Ein Punkt s von $\varkappa_s$ wird nach S' auf o, und nach S und S^* auf k_0 projiziert, wo dann S, S^* zu O und S' konjugiert sind. In ähnlicher Weise werde die Projektion eines Punktes auf o wie z. B. Π mit Π' bezeichnet.

Eine Gerade l schneidet $\varkappa_s$ in s_1, s_2; $\varkappa_t$ in t_1, t_2. Die Punktpaare S_1', S_2'; T_1', T_2'; A', B' gehören derselben Involution an. Die Kegelschnitte durch T_1, T_1^*; T_2, T_2^* schneiden auf o eine Involution aus; ihr gehören die Paare A', B'; T_1', T_2' an. Folglich gibt es einen (und nur einen) Kegelschnitt k durch T_1, T_1^*; T_2, T_2^*; S_1', S_2'. Lassen wir l variieren, so erhalten wir ein Kegelschnittsystem k, von dem wir zeigen wollen, daß alle k *durch zwei feste Punkte gehen.* Es muß jedoch dabei das Büschel

usgenommen werden, dessen Kegelschnitte k_0 in A', B' berühren. Um nsere Behauptung zu beweisen, nehmen wir die Punkte T_1, T_1^* fest an, o daß die Gerade l sich um einen festen Punkt x auf $\varkappa_t$ dreht. Die aare S_1', S_2' bilden eine feste Involution, und ein beliebiger von den hier uftretenden Kegelschnitten k ist aus S_1', S_2' und T_1 bestimmt. Zwei olche Kegelschnitte schneiden sich in $T_1, T_1^*; Q, Q^*$. Weil nun die Kegelchnitte durch diese vier Punkte auf o die eben betrachtete Involution usschneiden, sind sie mit den Kegelschnitten k identisch. Wenn l durch O geht, zerfällt k in das Geradenpaar Ox, OH; also müssen Q, Q^* auf OH liegen. Lassen wir nun die Gerade l sich um einen anderen festen unkt y auf $\varkappa_t$ drehen, so erhalten wir ein zweites Büschel von Kegelchnitten k, das auch zwei Grundpunkte auf OH hat. Die beiden Büschel, ie zu x und y gehören, haben einen Kegelschnitt, den von $l = xy$ bestimmten, gemein. *Also müssen die Punkte Q, Q^* fest sein.* Sie können uf folgende Weise erhalten werden: Wenn l mit $\sigma_1 \tau_1$ zusammenfällt, eht k in die beiden Tangenten über, die aus Σ_1' an k_0 gelegt werden önnen und die OH in Q, Q^* schneiden. Ebenso liefert $l = \sigma_2 \tau_2$ die beiden angenten an k_0 von Σ_2' aus; $T_1 T_1^* T_2 T_2^*$ ist ein in k_0 eingeschriebenes iereck, die Tangenten in diesen Punkten an k_0 bilden ein um k_0 umchriebenes Vierseit. Die Diagonalen des letzteren sind $O\Pi, o$ und OH; ie verbinden die Diagonalpunkte Π', Q', O des ersteren und bilden ein olardreieck von k_0.

Wir können nun umgekehrt von O, o, k_0 und Q ausgehen und haben ann den folgenden Satz:

Sei k_0 ein fester Kegelschnitt, o die Polare eines Punktes O in bezug uf k_0. Unter k seien die Kegelschnitte verstanden, die durch einen festen unkt Q gehen und in bezug auf welche o die Polare von O ist. a, b eien zwei beliebige Punkte auf den Tangenten von O aus an k_0, $\varkappa$ das üschel, dessen Kegelschnitte OQ in O berühren und durch a, b gehen. ann lassen sich die $\varkappa$ in Paare $\varkappa_s, \varkappa_t$ mit folgender Eigenschaft ordnen: in Kegelschnitt k schneidet o in zwei, k_0 in vier Punkten. Die ersteren erden aus O in s_1, s_2 auf $\varkappa_s$, die letzteren in t_1, t_2 auf $\varkappa_t$ projiziert. ann liegen, für jeden k, die vier Punkte s, t in einer Geraden.

Um eine für das folgende zweckmäßige Bestimmung von $\varkappa_s, \varkappa_t$ zu rhalten, bemerken wir, daß diese Kegelschnitte perspektiv liegen mit Π ls Zentrum, ab als Achse und C_s, O als entsprechenden Punkten, wenn C_s den zweiten Schnittpunkt von $O\Pi$ mit $\varkappa_s$ bezeichnet. Wird also $\varkappa_s$ eliebig, aber OQ in O berührend gewählt, so ist die Achse ab und C_s estimmt; es genügt folglich Π zu bestimmen. Die harmonischen Polaren urch Q in bezug auf k_0 schneiden eine Involution auf o aus, deren

Doppelpunkte Σ_1', Σ_2' sind. Wird diese Involution aus O auf $\varkappa_s$ pr
jiziert, so ist II ihr Zentrum. Weil schon OII bekannt ist, genügt es ei
Punktepaar dieser Involution aufzusuchen.

Der Satz läßt verschiedene Anwendungen zu. Hier wollen wir de
folgenden Fall betrachten. Es sei π eine Ebene und P ein Punkt in
$PQ = q$ eine Gerade außerhalb π. Ein Kegel K mit der Spitze P, m
π als Symmetrieebene und q als Erzeugender schneidet π in zwei Erze
genden s_1', s_2' und hat zwei Reihen zu π senkrechter Kreisschnitte; d
Spurlinien der beiden Kreisschnitte durch P in der Ebene π seien t_1', t
K ist offenbar durch Angabe von s_1', s_2' oder durch Angabe von t_1', t_2' b
stimmt, und zwar kann eines von diesen Geradenpaaren beliebig gewäh
werden. Man erhält in dieser Weise eine gewisse Beziehung zwische
den Geraden s' und t' durch P und zwar der Art, daß ein Paar s_1',
ein Paar t_1', t_2' ein-eindeutig bestimmt. Diese Beziehung hat auf Gru
der geometrischen Bedeutung der Geradenpaare s' und t' gewisse Eige
schaften, die es ermöglichen, ihr eine sehr einfache geometrische Erzeugu
zu geben. Um diese zu erhalten, betrachten wir die Schnitte der unendlic
fernen Ebene mit π, K, q, den Geradenpaaren s', t' und der Normalen P
von π. Sie seien mit o, bzw. k, Q, S_1', S_2'; T_1', T_2' und O bezeichne
K ist offenbar durch P und k bestimmt; die Kegelschnitte k gehen dur
Q, und o ist die Polare von O in bezug auf alle k. k_0 sei der absolu
Kegelschnitt. Die Schnittpunkte von k mit o sind S_1', S_2'; die Schnit
punkte von k und k_0 werden aus O durch OT_1', OT_2' projiziert. Wir könne
nun die Kegelschnitte $\varkappa_s$, $\varkappa_t$ des oben bewiesenen Satzes einführen. B
trachten wir zwei korrespondierende Geradenpaare s', t', so schneiden d
zu π senkrechten Ebenen durch diese Geraden $\varkappa_s$ bzw. $\varkappa_t$ in den Punkt
s_1, s_2; t_1, t_2 einer Geraden. Und die Konstruktionen in der unendlich ferne
Ebene können in folgender Weise nach π verlegt werden: Wir projizier
$\varkappa_s$, $\varkappa_t$ von P aus; die projizierenden Kegel berühren sich längs der E
zeugenden PO, und die gemeinsame Tangentialebene ist die orthogona
projizierende Ebene von q, deren Spurlinie in π mit q' bezeichnet se
Schneiden wir diese Kegel mit einer zu π parallelen Ebene, und werde
die Schnittkurven auf π orthogonal projiziert, so erhalten wir zwei Kegg
schnitte $\varkappa_s'$, $\varkappa_t'$, die q' in P berühren; zwei korrespondierende Gerade
paare s', t' durch P schneiden $\varkappa_s'$ bzw. $\varkappa_t'$ in Punkten einer Gerade
Damit ist die gewünschte Erzeugung der Beziehung zwischen s' und
erreicht, und es erübrigt, die Konstruktion von $\varkappa_s'$, $\varkappa_t'$ anzugeben. Für d
Vereinfachung der Erzeugung ist die Bemerkung von besonderem Wert
daß man für $\varkappa_s'$, $\varkappa_t'$ Kreise wählen kann. Denn im Satze S. 139 können a,
nach A', B' verlegt werden; weil hier A', B' die Kreispunkte von π sin
werden die Kegel durch $\varkappa_s$, $\varkappa_t$ durch die zu π parallelen Ebenen in Krei

schnitten. Nach den oben gemachten Bemerkungen wählen wir für $\varkappa_s'$ nen beliebigen Kreis, der q' in P berührt, und wollen auf der Senkchten π' zu q' durch P den Ähnlichkeitspunkt Π' von $\varkappa_s'$, $\varkappa_t'$ aufsuchen. e zueinander senkrechten Ebenen durch q schneiden $\varkappa_s'$ in Punktpaaren ner Involution mit dem Zentrum Π'. Wir können z. B. das zu π' symetrische Paar aufsuchen. In der Fig. 1 ist $q^{(0)}$ die Umlegung von q um q'. n Kreis mit der Mitte N auf q', der $q^{(0)}$ berührt, schneidet die Parallele π' durch N in R; dann ist PR ein Strahl im gesuchten Paare. Schneidet R den Kreis $\varkappa_s'$ in X, so ist $X\Pi'$ zu π' senkrecht, also Π' und mit-

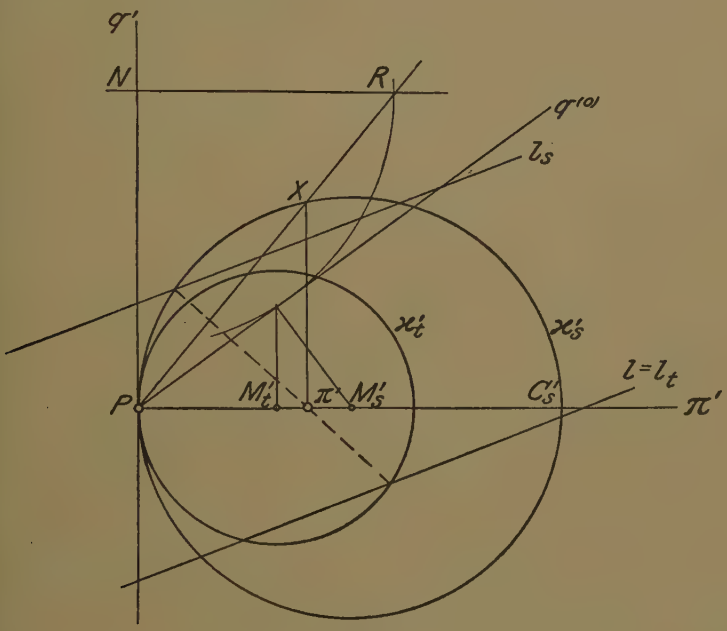


Fig. 1.

n $\varkappa_t$ bestimmt. Wir können aber eine noch einfachere Konstruktion n $\varkappa_t'$ angeben; dieselbe könnte in Zusammenhang mit dem Beweise des tzes S. 139 hergeleitet werden, sie ergibt sich auch leicht aus der schon naltenen. Es sei γ der Winkel zwischen q und PO, φ der Winkel, den R mit π' bildet. Dann zeigt unsre Figur, daß $\cos\gamma \cdot \operatorname{tg}\varphi = 1$. Wenn C_s' r zweite Schnittpunkt von π' und $\varkappa_s'$ ist, hat man

$$(\Pi' X)^2 = P\Pi \cdot \Pi' C_s' \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\Pi' X}{P\Pi'}\right)^2 = \frac{\Pi' C_s'}{P\Pi'}$$

d, weil Π' der Ähnlichkeitspunkt ist,

$$\frac{\Pi' C_s'}{P\Pi'} = \frac{r_s}{r_t},$$

wenn r_s, r_t die Halbmesser sind. Es ist also

$$\frac{r_s}{r_t} = \left(\frac{\Pi' X}{P\Pi'}\right)^2 = \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\gamma},$$

$$r_t = r_s \cos^2\gamma.$$

Folglich:

P sei ein Punkt der Ebene π, $q = PQ$ eine Gerade, in π nicht enthalten und zu π nicht normal, q' deren Orthogonalprojektion auf π, K die Kegel, die P als Spitze, π als Symmetrieebene und q als Erzeugende haben. Dann lassen sich die Kreise $\varkappa'$, die q' in P berühren, in Paaren $\varkappa'_s$, $\varkappa'_t$ so ordnen, daß die Erzeugenden von K in π den Kreis $\varkappa'_s$, die Kreisschnitte von K durch P und zu π senkrecht den Kreis $\varkappa'_t$ in Punkten schneiden, die in einer Geraden liegen. Und zwar kann der Mittelpunkt M'_s von $\varkappa'_s$ beliebig gewählt werden; er bestimmt den Mittelpunkt M'_t von $\varkappa'_t$, indem man das Lot von M'_s auf die Umlegung $q^{(0)}$ fällt und von Fußpunkte dieses Lotes ein Lot auf PM'_s fällt, das dann M'_t ausschneidet.

Es wäre nun möglich, nachdem dies Resultat gewonnen ist, es nachträglich auf elementar-geometrischem Wege zu verifizieren, was ich jedoch hier nicht ausführe. Ich möchte aber noch die Bemerkung hinzufügen, daß die Beziehung zwischen den Geradenpaaren s' und t' *ein spezieller Fall einer allgemeinen Beziehung zwischen zwei ∞^1-Systemen von der Art ist, daß jedes Paar von Elementen des einen Systems ein Paar des anderen ein-eindeutig bestimmt.* Auf diese allgemeine Beziehung und deren geometrische Erzeugung werde ich in einer späteren Note zurückkommen.

Je nachdem die Sekante l den Kreis $\varkappa'_t$ reell schneidet oder nicht, sind die zu π senkrechten Kreisschnitte reell oder imaginär. Wenn l $\varkappa$ berührt, erhält man die Umdrehungskegel, die q enthalten und symmetrisch zu π liegen. Für die Mittelpunksflächen zweiten Grades, die K als Asymptotenkegel haben, ergibt sich die Bedeutung der Geradenpaare s' und t sofort. Ferner ist der obige Satz für die Konstruktion der *Fokalstrahlen* eines Kegels verwendbar. Denn wenn der unendlich ferne Kegelschnitt in bezug auf k_0 reziproziert wird, geht K in den Normalenkegel $\bar{K}$ über, t'_1, t'_2 in die Fokalstrahlen $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$ und $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$ behalten ihre Bedeutung. Die den Kreisen $\varkappa'_s$, $\varkappa'_t$ entsprechenden Kegelschnitte $\bar{\varkappa}_s$, $\bar{\varkappa}_t$ ergeben sich leicht, wenn man z. B. den Kreis mit der Mitte P und dem Radius $\sqrt{-1}$ zum Fundamentalkegelschnitt wählt. Ich fasse nur das Resultat zusammen. $\bar{K}$ sind die Kegel, die π als Symmetrieebene und den Punkt P in π als Spitze haben, und die eine gegebene Ebene $\bar{q}$ berühren. Die Erzeugenden eines Kegels $\bar{K}$ in π seien $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$; die Fokalstrahlen desselben Kegels in π seien $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$. *Dann lassen sich die Parabeln $\bar{\varkappa}$, die die Spurlinie q' von*

π als gemeinsame Achse, den Punkt P als gemeinsamen Brennpunkt ben, in Paare $\bar{x}_s, \bar{x}_t$ so ordnen, daß die Tangenten an $\bar{x}_s$, die zu $\bar{s}_1, \bar{s}_2$ rallel sind, und die zu $\bar{t}_1, \bar{t}_2$ parallelen Tangenten an $\bar{x}_t$ sich in einem unkt schneiden. Die Parameter von $\bar{x}_s, \bar{x}_t$ verhalten sich wie $\cos^2\gamma : 1$, enn γ der Winkel zwischen π und $\bar{q}$ ist. Die *Umdrehungskegel* $\bar{K}$ geben sich folglich, wenn der Schnittpunkt der erwähnten Tangenten $\bar{x}_s$ die Parabel $\bar{x}_t$ durchläuft.

§ 2.

Von der oben erhaltenen Konstruktion der Geradenpaare s' und t' ollen wir eine spezielle Anwendung machen. Es handelt sich um die *umliche Erzeugung der Beziehung zweier affinen ebenen Systeme mittels arallelprojektion.* Zur Orientierung mögen einige Bemerkungen über die ffine Verwandtschaft vorausgeschickt werden.

Zwei ebene projektive Systeme sind affin, wenn die unendlich fernen eraden sich entsprechen. Liegen die Systeme in derselben Ebene, so t also die unendlich ferne Gerade dieser Ebene eine Doppelgerade in der rojektiven Beziehung. Weil dann schon zwei entsprechende Geraden geben sind, wird die Beziehung durch Angabe zweier Dreiecke bestimmt. ei zwei entsprechenden Geraden entsprechen sich die unendlich fernen unkte; die Geraden tragen daher ähnliche Punktreihen $A, B, C, \ldots$; $', B', C', \ldots$ Es muß also $AB : A'B'$ konstant sein; zu jeder Richtung des einen Systems gibt es eine Zahl $\nu = \nu(a)$, die das konstante Ver-ltnis zwischen einer Strecke von dieser Richtung und der entsprechenden recke angibt. Ich erinnere ferner daran, daß die Flächeninhalte ent-rechender Figuren ein konstantes Verhältnis σ haben, was sich übrigens s den Bemerkungen unten ergeben wird. Die Doppelelemente können i der Affinität, wie bei der allgemeinen Projektivität, in verschiedener eise auftreten. Sie können speziell in unendlicher Anzahl vorhanden in. Es gibt dann eine Gerade p, die nur Doppelpunkte trägt, und einen unkt O, der nur Doppelstrahlen trägt. Es kann dabei O außerhalb oder f p liegen. Die Systeme sind dann *perspektiv* mit p als Perspektivitäts-hse und O als Zentrum. Wenn p endlich, O unendlich ist, liegt die gentliche perspektive Lage vor; die Beziehung ist dann offenbar von p d irgend zwei entsprechenden Punkten bestimmt. Wird in diesem Falle e Ebene des einen Systems um p um einen beliebigen Winkel gedreht, kann das eine System aus dem anderen durch Parallelprojektion ab-leitet werden. Umgekehrt gibt die Parallelprojektion eines ebenen stems und dessen Umlegung in die Bildebene immer affine Systeme in rspektiver Lage. Die Bedingung dafür, daß zwei affine ebene Systeme perspektive Lage gebracht werden können, ist offenbar die, daß es eine

reelle Richtung mit $\nu = 1$ gibt. Nun bildet gerade die Affinität den Ausnahmefall bei dem allgemeinen Satz von Poncelet, daß zwei ebene projektive Systeme in reelle perspektive Lage gebracht werden können. Man kann sich dies klarmachen, wenn man z. B. einen Kreis des einen Systems und die entsprechende Ellipse betrachtet. Wird das eine System so verschoben, daß die Mittelpunkte dieser Kurven sich decken, so müssen sich der Kreis und die Ellipse reell schneiden, wenn eine reelle perspektive Lage möglich ist. Es ergibt sich hieraus, daß eine reelle affine Transformation nicht immer auf eine reelle perspektive Transformation zurückgeführt werden kann (es muß vielmehr eine gewisse *Ungleichung* erfüllt sein; vgl. z. B. Schröter, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung usw. (1880), S. 412ff.), daß sie aber immer aus einer Ähnlichkeitstransformation und einer perspektiven Transformation zusammengesetzt werden kann. Daraus läßt sich z. B. das obenerwähnte Vorhandensein der Konstante σ erschließen.

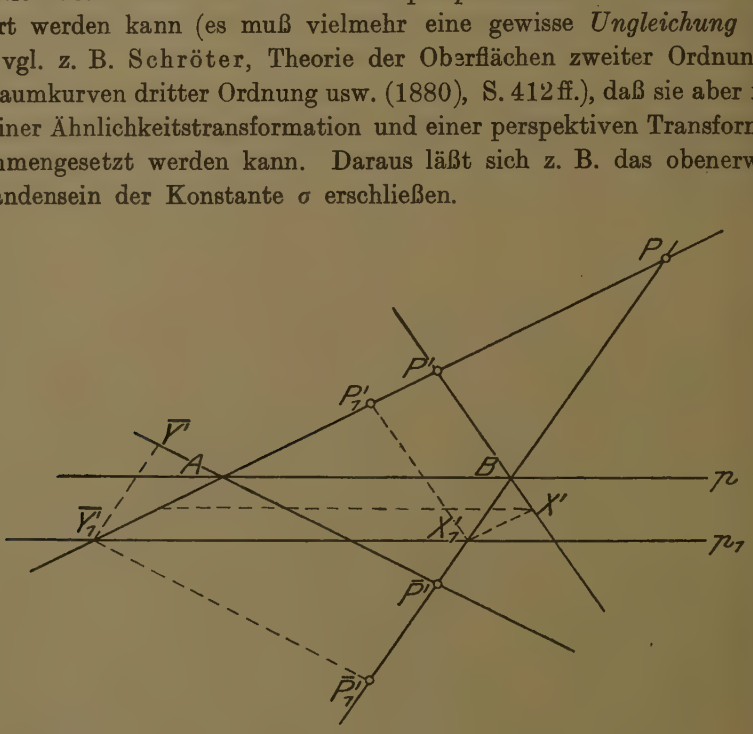


Fig. 2.

Nach dieser Rekapitulation einiger Sätze der elementaren projektiven Geometrie wollen wir eine besondere Definition der perspektiven Affinität herleiten. p sei die Perspektivitätsachse, P und P' zwei entsprechende Punkte (Fig. 2). Die Systeme wollen wir mit (P) und (P') bezeichnen. (P) soll festliegen, (P') dagegen werde in der Ebene π des Systems (P) verschoben und gespiegelt. Bei der Spiegelung von (P') an p geht (P') in das symmetrische System $(\overline{P}')$ über, das mit (P) perspektiv liegt mit p als Achse und dem unendlich fernen Punkt von $P\overline{P}'$ als Zentrum. Die *Affinitätsrichtungen* PP', $P\overline{P}'$ seien mit s_1, s_2 bezeichnet, wenn sie ab

em Systeme (P) angehörig betrachtet werden; ihnen entsprechen in P') $s_1' = s_1$, $s_2' = P'B$. Einer zu p parallelen Strecke in (P) entspricht ne gleich lange in (P') und $(\bar{P}')$. Wird daher (P') in der Richtung s_1 oder $\bar{P}'$) in der Richtung s_2 verschoben, so wird die perspektive Lage beibehalten, nd die Affinitätsrichtungen werden nicht geändert. Bei der Verschiebung liegt immer ein Punkt X' auf $P'B$ mit seinem entsprechenden auf PB, bzw. ein Punkt $'$ auf $\bar{P}'A$ mit dem entsprechenden auf PA vereinigt. Es sei (Fig. 3) C der chnittpunkt der Mittennormale von PP' mit p; dann ist $PC = P'C = \bar{P}'C$. C kann daher als Perspektivitätsachse gewählt werden und, um die ysteme in perspektive Lage mit PC als Achse zu bringen, hat man (P') zw. $(\bar{P}')$ um C zu drehen. Weil nun $\measuredangle B'P'C = \measuredangle B'\bar{P}'C = \measuredangle BPC$, gelangt B', bei der Drehung von (P'), nach B_1' auf PB. Die Affinitäts-

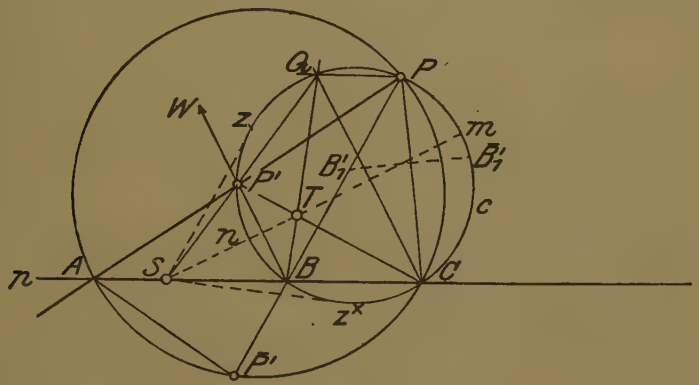


Fig. 3.

chtung in der neuen perspektiven Lage von (P) und (P') ist mithin s_2. ei der Drehung von $(\bar{P}')$ gelangt $\bar{B}'$ nach $\bar{B}_1'$, dem zu B_1' symmetrischen unkt bezüglich PC. Nun liegen die Punkte P, P', B, C auf einem reise c; der Symmetrie halber geht c durch $\bar{B}_1'$. Die Affinitätsrichtung $\bar{B}_1'$ ist folglich s_1. Die Richtungen AB und PC, die Strecken tragen, enen gleich lange entsprechen, nennen wir *Affinitätsachsen*; wir wollen e mit r_1, r_2 bezeichnen. Es kann deren drei nicht geben, es sei denn, ß die Systeme kongruent (symmetrisch) sind. Wird in der Fig. 3 $PQ \parallel p$ zogen, so ist $\measuredangle QPP' = \measuredangle BPC$; übrigens liegen die Punkte $A, C, P, \bar{P}'$ f einem Kreise. *Es gibt zwei Affinitätsachsen und zwei zugehörige ffinitätsrichtungen, von den Verschiebungen abgesehen also vier per-ektive Lagen von (P) und (P'), $(\bar{P}')$. Die Achsen und die Affinitäts-chtungen haben dieselben Bissektrizen.*

Gehen wir umgekehrt von zwei Paaren von Richtungen s_1, s_2; r_1, r_2 s, die dieselben Bissektrizen haben, so können s_1, s_2 als die Affinitäts-

richtungen, r_1, r_2 als die Affinitätsachsen einer perspektiven Affinit
betrachtet werden, die dann eindeutig bestimmt ist. Denn in perspektiv
Lage mit $p \mid r_1$ als Perspektivitätsachse entspricht z. B. s_1 sich selbs
Ist P beliebig und wird $PA \parallel s_1$, $A\overline{P}'$ symmetrisch zu AP bezüglich
und $P\overline{P}' \parallel s_2$ gezogen, so ist $\overline{P}'$ und mithin P' bestimmt. *Eine perspe
tive Affinität kann durch Angabe der beiden Affinitätsachsen in de
einen System und der beiden Affinitätsrichtungen definiert werden.* F
die Achsen ist die oben eingeführte Verhältniszahl $\nu = 1$; für die Affin
tätsrichtungen ist $\nu = \sigma$, was sich z. B. aus der Betrachtung ein
Parallelogramms in (P) ergibt, dessen Seiten die Richtungen r_1,
haben.

Bei den vorhergehenden Betrachtungen haben wir die Punkte A und
endlich angenommen. Sie können unendlich fern werden, und man erhä
dann spezielle Affinitäten, indem sich *die vier Richtungen s und r a
zwei reduzieren*, was in dem oben betrachteten Fall nicht möglich i
Wenn A unendlich fern ist, fallen s_1 und r_1, s_2 und r_2 zusammen; σ i
dann und offenbar nur dann $= 1$ (*flächentreue* Affinität). Wenn C unen
lich fern ist, muß s_1 auf r_1 senkrecht stehen; dann fallen s_1 und s_2, r_1 u
r_2 zusammen (*orthogonale* Affinität).

Indem wir jetzt zur perspektiven Lage von (P) und (P') mit d
Perspektivitätsachse $p \parallel r_1$ zurückkehren, drehen wir die Ebene π' von $(P$
um einen beliebigen Winkel um p. (P') wird dann aus (P) dur
Parallelprojektion in der Richtung $PP' = g$ oder auch (P) aus (P')
zeugt. Es sei $ABC\ldots$ ein Polygon in (P); die zu g parallelen Strahl
durch seine Ecken bestimmen ein Prisma $\mathfrak{P}$, aus dem das entsprechen
Polygon $A'B'C'\ldots$ von π' ausgeschnitten wird. Zunächst suchen w
auf $\mathfrak{P}$ alle ebenen Schnitte auf, die mit $A'B'C'\ldots$ in der Weise ko
gruent sind, daß die bei der Kongruenz entsprechenden Ecken auf de
selben Kantenlinien liegen. Jedes derartige Polygon und nur ein solch
bestimmt mit $ABC\ldots$ diejenige Affinität zwischen (P) und (P'), v
der wir ausgegangen sind, und die durch die Paare s, r definiert ist. D
mit π' parallelen Ebenen liefern solche Schnitte und schneiden π
Parallelen zu r_1. Wir erhalten ferner solche Schnitte durch die Ebene
die zu π' in bezug auf eine zu g senkrechte Ebene symmetrisch sin
Diese müssen dann π in Parallelen zu r_2 schneiden. Die verschieden
perspektiven Lagen in π von (P) und (P'), $(\overline{P}')$, die wir oben betrac
teten, entsprechen also den Parallelverschiebungen von π' in der Ric
tung g und den Spiegelungen von π' an zu g senkrechten Ebenen.
kann nun aber g und mithin $\mathfrak{P}$ variiert werden. Bei der Drehung von
um p erzeugt g einen Kegel K, der P als Spitze und den Kreis üb
dem Durchmesser $P'\overline{P}'$ als Basiskurve hat. Man erhält dann ∞^1 Prismen

ren Kantenlinien zu den Erzeugenden von K parallel sind. Die ebenen nitte $A_1B_1C_1\ldots, A_2B_2C_2\ldots$ irgend zweier von diesen Prismen sind mittels $ABC\ldots$ affin, und die entsprechenden Punkte A_1, A_2 liegen Kantenlinien durch A. Nun können, wie unten gezeigt wird, diese nitte in unendlich vielen Weisen so gewählt werden, daß die genannte finität in Kongruenz übergeht. Unter diesen kongruenten Schnitten det sich der oben mit $A'B'C'\ldots$ bezeichnete, und dieser ist der einzige, für alle Prismen gemeinsam ist; dabei sind immer die mit $ABC\ldots$ ngruenten Schnitte außer Betracht gelassen worden. Der Kegel K de- iert daher die Affinität zwischen (P) und (P') in der Weise, daß (P') s dem für alle $\mathfrak{P}$ gemeinsamen Schnitt bestimmt ist. Dies ergibt sich ch sofort, wenn wir die Beziehung von K zu den Paaren r, s näher trachten. π ist eine Symmetrieebene von K; s_1, s_2 sind die Erzeugenden π. Der Basiskreis über $P'\bar{P}'$ steht auf p_1 senkrecht. Nun sind die reisschnitte von K bekanntlich Wechselschnitte zu den Erzeugenden π, und weil r_1, r_2 dieselbe Eigenschaft haben, muß der zweite Kreis- nitt auf r_2 senkrecht stehen. *Jeder Kegel zweiter Ordnung K definiert so eine reelle perspektive Affinität. Wird dieselbe in die zu den reellen reisschnitten senkrechte Symmetrieebene π verlegt, so liefern die Erzeugenden in π die Affinitätsrichtungen, die Normalen zu den Kreisschnitten die Affinitätsachsen und die Erzeugenden von K die Richtungen, denen das eine System in dem anderen parallelprojiziert werden kann.* muß jedenfalls vorausgesetzt werden, daß K eigentlich und auch kein ndrehungskegel ist. Im letzteren Falle artet die Affinität aus; bei ner orthogonalen Affinität geht K in eine zu π senkrechte (Doppel-) bene über.

Die Anwendung des Satzes S. 139 ist nun unmittelbar. Wir be- achten das System (P) in π und eine nicht zu π senkrechte Richtung $Q = q$. Die Aufgabe, *die mit (P) affinen Systeme (P') zu bestimmen, e in (P) in der Richtung q parallelprojiziert werden können*, erhält e folgende Lösung. Nach § 1 werden die Kreise $\varkappa_s, \varkappa_t$ (wir lassen hier e Akzente weg) konstruiert; jeder Sekante l entspricht dann eine be- mmte Affinität der verlangten Eigenschaft, indem ihre Schnittpunkte t $\varkappa_s$ bzw. $\varkappa_t$ von P aus projiziert die Affinitätsrichtungen bzw. die rmalen der Affinitätsachsen liefern. Die letzteren sind reell, wenn l n Kreis $\varkappa_t$ reell schneidet; geht l durch P, so erhält man eine unbe- mmte orthogonale Affinität mit der Achse senkrecht zu q'. Die ange- bene Konstruktion liefert in erster Linie die Normalen der Achsen. schneide $\varkappa_s$ in s_1, s_2, so daß $Ps_1 = s_1$, $Ps_2 = s_2$. Π ist der Ähnlich- itspunkt zweier Systeme, die wir mit $(\varkappa_s)$ und $(\varkappa_t)$ bezeichnen können. *ird l als zum Systeme $(\varkappa_t)$ gehörig betrachtet, $l = l_t$, so schneidet die*

entsprechende Gerade l_s den Kreis $\varkappa_s$ in r_1, r_2, so daß $Pr_1 = r_1$, $Pr_2 =$ die Achsen sind. Denn Pr_2 in $(\varkappa_s)$ entspricht $C_t t_1$ in $(\varkappa_t)$, wenn t_1, die Schnittpunkte von l und $\varkappa_t$ sind, und diese Geraden sind paralle Es ist also $Pr_2 \perp Pt_2$, wie die Behauptung besagt. Dies liefert sofo die Antwort auf die Frage, wenn s_1, s_2 mit r_1 bzw. r_2 zusammenfalle *Die flächentreuen Affinitäten werden also von den Sekanten l durch d Ähnlichkeitspunkt P geliefert*[1]). Wir können uns die allgemeinere Aufga stellen, die Affinitäten mit gegebenem Flächenverhältnis σ zu bestimme Aus der Fig. 3 ergibt sich leicht

$$\sigma = \sin\alpha : \sin\beta, \tag{1}$$

wenn α der Winkel (r_1, r_2) oder (t_1, t_2) und β der Winkel (s_1, s_2) i Es müssen also die Sehnen von l in $\varkappa_s$ und $\varkappa_t$ ein konstantes Verhältn haben und mithin l die gemeinsame Tangente an zwei mit $\varkappa_s$ bzw. konzentrischen Kreisen sein. Diese Kreise werden einander ein-eindeut zugeordnet, wie sofort klar ist. Wir wollen die Einhüllende E von l b stimmen und beweisen zu diesem Zwecke zunächst den Hilfssatz:

Es seien c_1, c_2 zwei Büschel Kegelschnitte mit zwei gemeinsam Grundpunkten a, b. Die Kegelschnitte c_1 haben in a, b feste Tangente ebenso die c_2. Ordnen wir die Kegelschnitte der beiden Büschel einand projektiv zu, so umhüllen die gemeinsamen Tangenten entsprechend Kegelschnitte eine Kurve vierter Klasse. Wenn in den beiden tange tiellen Büscheln der Kegelschnitt a, b sich selbst entspricht, so zerfä die Einhüllende in zwei Kegelschnitte a, b und E. Denn die Tangent der Einhüllenden von einem Punkte U aus sind die gemeinsamen Strahl zugeordneter Paare in den beiden aufeinander projektiv bezogenen volutionen von Tangenten aus U an den c_1 und den c_2. Es gi deren vier. Wenn der Kegelschnitt a, b sich selbst entspricht, gehör Ua, Ub für jede Lage von U zu diesen Tangenten. Der Kegelschn a, b bildet also einen Teil der Einhüllenden; der Rest ist der Keg schnitt E.

Wir wählen nun für a, b die Kreispunkte und als Tangenten v c_1, c_2 in diesen Punkten die nach ihnen gehenden Strahlen von M_s bzw. aus. Dann stellen c_1, c_2 die Büschel der zu $\varkappa_s, \varkappa_t$ konzentrischen Kre dar, die, wenn σ gegeben ist, projektiv aufeinander bezogen sind u zwar so, daß der Kegelschnitt a, b sich selbst entspricht. Die Gerad umhüllt folglich einen Kegelschnitt E. Unabhängig von dem Werte vo entsprechen sich immer $c_1 = \varkappa_s$, $c_2 = \varkappa_t$. E gehört also dem von $\varkappa_s$ und definierten tangentiellen Büschel an. Demnach:

---

[1]) Die Sekanten l durch P können außer Betracht gelassen werden.

Die Affinitäten mit gegebenem Flächenverhältnis σ, die zur gegebenen rojektionsrichtung q gehören, werden von den Tangenten l eines be-mmten, dem tangentiellen Büschel $\varkappa_s$, $\varkappa_t$ angehörenden Kegelschnittes E timmt. Die konstruktive Behandlung von E ergibt sich unmittelbar raus, indem E mit $\varkappa_s$ perspektiv liegt mit dem Zentrum Π und mit C_s als entsprechenden Punkten. Wird also, für gegebenes σ, eine einzige r Geraden l konstruiert, was nach (1) leicht auszuführen ist, so ist E stimmt, und man erhält sofort die Perspektivitätsachse. Es bietet auch ine Schwierigkeiten, die metrischen Verhältnisse bei E festzustellen. M_t ist eine Achse und P ein Scheitel. Ist A der zweite Scheitel, so fert (1) sogleich die Länge der Achse PA in σ ausgedrückt. Die uchtgerade ω_s in $(\varkappa_s)$ wird leicht erhalten, ferner ergeben sich die ymptoten, wenn E Hyperbel, oder die zu q' parallele Achse, wenn E lipse ist. Man sieht, daß die Tangenten l von E den Kreis $\varkappa_t$ reell nneiden und folglich reelle Affinitäten liefern, wenn A innerhalb der recke PC_t fällt. Dabei entsprechen den A auf ΠC_t Ellipsen E, die nerhalb $\varkappa_t$ liegen, und den A auf $P\Pi$ Hyperbeln E. Übrigens ist es n vornherein klar, daß bei den reellen Affinitäten

$$0 < \sigma^2 \leqq 1 : \cos^2\gamma = r_s : r_t$$

n muß. Die Anwendung von (1) zeigt, daß wenn A sich P nähert, zum Grenzwerte $r_s : r_t$ strebt. Für diesen Wert von σ^2 geht dann E das Punktpaar auf q', über, das dem tangentiellen Büschel $\varkappa_s$, $\varkappa_t$ an-nört; für $\sigma = 1$ geht E, wie schon oben gefunden wurde, in das Punkt-ar P, Π und für $\sigma = 0$ in den Kreis $\varkappa_t$ über. Wenn also A die Strecke P beschreibt, geht σ^2 wachsend von 0 bis $r_s : r_t$.

Wir geben jetzt zwei Richtungen q_1, q_2 an und wollen *die mit* (P) *inen Systeme* (P') *bestimmen, die sowohl in der Richtung* q_1 *wie auch der Richtung* q_2 *in* (P) *parallelprojiziert werden können.* Indem man den Betrachtungen des § 1 zurückkehrt, sieht man, daß die Kegel-nitte k ein Büschel bilden und daß sich also die Sekante l um einen ten Punkt Y dreht. Die Konstruktion ist in der Fig. 4 ausgeführt. q_2 werden mit einer zu π senkrechten Ebene geschnitten und die hnittpunkte um die Spurlinie m in π umgelegt. Es ist $m \perp q_1'$ gewählt. e Umlegungen seien $Q_1^{(0)}$, $Q_2^{(0)}$, und $\bar{Q}_1^{(0)}$ sei zu $Q_1^{(0)}$ symmetrisch bezüg-h m. Die Verbindungsgeraden $Q_1^{(0)} Q_2^{(0)}$, $\bar{Q}_1^{(0)} Q_2^{(0)}$ schneiden m in Punkten, aus P durch die Doppelstrahlen der Involution s projiziert werden. enn also die Kreise $\varkappa_s$, $\varkappa_t$ in bezug auf q_1 konstruiert werden, so er-t sich Y sofort aus den Doppelstrahlen der Involution s; offenbar ß Y auf q_2' liegen. Betrachten wir zwei Prismen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ mit gemein-ner Basis (deren Kantenlinien zu q_1 bzw. q_2 parallel sind), so liefert

die angegebene Konstruktion die Lösung der Aufgabe, *alle ebene Schnit von* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ *zu bestimmen, die in der Weise kongruent sind, daß en sprechende Ecken auf Kantenlinien durch dieselbe Ecke des Basispolygo liegen.* Es gibt ∞^1 derartige Schnitte; ihre Ebenen gehen zu je zwei durch dieselben Geraden in π, die Parallelen zu r_1, r_2.

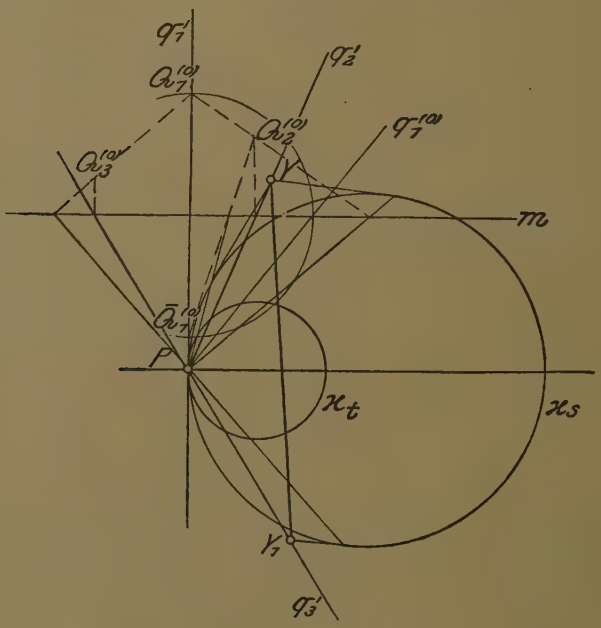


Fig. 4.

Geben wir drei Richtungen q_1, q_2, q_3 an, so ist K vollkommen b stimmt. Werden $\varkappa_s$, $\varkappa_t$ in bezug auf q_1 konstruiert und dann, wie obe das zu q_1, q_2 gehörige Zentrum Y, und in entsprechender Weise das q_1, q_3 gehörige Zentrum Y_1 (Fig. 4), so bestimmt $l = Y Y_1$ das *mit* (K *affine System* (P'), *das in den drei Richtungen* q *in* (P) *parallelprojizie werden kann.* Betrachten wir drei Prismen auf gemeinsamer Basis (der Kantenlinien die Richtungen q_i haben), *so gibt es ein Polygon und n eines* (die Basis ausgenommen), *das auf allen Prismen in der Wei ausgeschnitten werden kann*, daß je zwei Ecken, die bei der Kongrue einander entsprechen, auf Kantenlinien durch denselben Punkt der Bas liegen. Dies Polygon ist reell, wenn $l = Y Y_1$ den Kreis $\varkappa_t$ re schneidet.

§ 3.

Die oben hergeleitete Definition der Affinität aus den Affinitätsachsen nd den Affinitätsrichtungen ist in einer allgemeineren enthalten. Zunächst ann die Affinität durch Angabe zweier Paare endlicher Punkte P, P'; A, A' nd der Reihen auf der unendlich fernen Geraden definiert werden, also urch die Strahlenbüschel in P und P' und die endlichen Punkte A, A'. ndem Verschiebungen und Spiegelungen von (P') immer einbegriffen sind, ann die Strecke $P'A'$ aus PA durch Angabe von $\nu(a)$, $a = PA$, be- immt werden. Ferner kann die Beziehung der zwei Büschel in einer eziellen Weise definiert werden. Wenn $\Lambda(a, b)$ den einen der beiden Winkel $< \pi$ bedeutet, die a und b einschließen, so können immer, bei wei projektiven Büscheln und dem beliebigen Strahl a des einen, zwei ndere derart gefunden werden, daß

$$\Lambda(a, b) = \Lambda(a', b'); \quad \Lambda(a, c) = \Lambda(a', c'). \tag{2}$$

Chasles, Traité de géométrie supérieure (1852), Art. 147). Gibt man n Büschel in P drei Strahlen a, b, c an und fügt man die Bedingung (2) nzu, so ist das Büschel in P' bis auf Verschiebungen und Spiegelungen ndeutig bestimmt[2]). Hieraus ergibt sich, daß eine Affinität durch An- abe in (P) dreier Strahlen a, b, c und der Zahl $\nu(a)$ unter Zufügung er Bedingung (2) bestimmt ist. Für $\nu(a) = 1$ geht diese Definition in ie oben hergeleitete über. Denn es ist

$$\Lambda(r_1, s_1) = \Lambda(r_1', s_1'); \quad \Lambda(r_1, s_2) = \Lambda(r_1', s_2')$$

Setzt man, bei zwei projektiven Strahlenbüscheln mit gemeinsamem cheitel, die Existenz dreier Strahlen a, b, c mit der Eigenschaft (2) raus, so ergibt sich sofort, daß die *Büschel durch eine Drehung bzw. piegelung und Drehung in zwei Weisen in involutorische Lage gebracht erden können.* Die Büschel seien $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$; gleichzeitig werde das mmetrische Büschel $\overline{\mathfrak{B}}'$ betrachtet, so daß wir annehmen können, daß er Drehungssinn in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ derselbe ist. Ist z. B. der spitze Winkel $(a, b) <$ der spitze Winkel (a, c), so führt eine Drehung von $\mathfrak{B}'$ gleich- eitig c' in a nnd a' in c, d. h. $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ in involutorische Lage. Bei führt die Drehung von b' in a zur involutorischen Lage. Demnach lt (2) für jeden Strahl a, und ferner bilden die Strahlen (a, c), (a, b) wei Involutionen[3]), die sich am einfachsten ergeben, indem man die üschel perspektiv macht, wie dies in Fig. 3 schon der Fall ist. Ferner

[2]) Dabei lassen wir beiseite den Fall, daß die Geradenbüschel kongruent sind.

[3]) Vgl. z. B. Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, I, S. 71.

können hier, wie bei der allgemeinen Affinität, die entsprechenden Halb
strahlen und mithin die entsprechenden Winkel $< \pi$ unterschieden werde
Die Kreise durch P, P' schneiden die Achse p in Paaren einer Involution
die, aus P projiziert, die *Strahleninvolution S der gleichen entsprechende*
Winkel liefert. In ähnlicher Weise schneiden die Kreise durch $P, \bar{P}'$ ein
Involution auf p aus, die aus P durch die *Strahleninvolution T de*
supplementären entsprechenden Winkel projiziert wird. Die Zentren diese
Involutionen ergeben sich sofort, wenn sie am Kreise c dargestellt werden
es ist $S = P'Q \cdot p$, $T = P'C \cdot BQ$. Der dritte Diagonalpunkt des Vier
ecks $BCQP'$ ist der unendlichferne Punkt W von $P'B$; dieser Punk
ist das Zentrum einer Involution W auf c, deren Bedeutung wir jetz
feststellen wollen. Oben wurde die Zahl ν eingeführt, die das Verhältni
einer Strecke in (P) zur entsprechenden in (P') angibt. Wollen wir di
Strahlen PX aufsuchen, denen ein gegebenes ν entspricht, so so
$PX : P'X = \nu$ sein, wenn X der Schnittpunkt mit p ist. Es gibt zwe
Punkte X, die Schnittpunkte von p und einem harmonischen Kreise z
P, P' sind. Die harmonischen Kreise zu P, P' bilden ein Büschel, di
Strahlen mit gleichen ν also eine Involution, von der wir schon zwe
Paare kennen: PP', PB mit $\nu = \sigma$; PQ, PC mit $\nu = 1$. *Die Involutio*
W ist folglich mit der Involution der Strahlen mit gleichen ν identisch
Die gegenseitige Beziehung der Involutionen S, T, W ergibt sich übrigen
daraus, daß die harmonischen Kreise zu P, P' das Orthogonalbüschel z
demjenigen mit den Grundpunkten P, P' bilden. Sind M, M^* die Punkte
in denen zwei zu P, P' harmonische Kreise p berühren, so gehört de
Kreis mit dem Durchmesser MM^* dem Büschel durch P, P' an un
muß auch durch $\bar{P}'$ gehen. Die Doppelstrahlen derjenigen Involution
deren Paare aus den Strahlen mit gleichen ν gebildet sind, bilden als
einen rechten Winkel, der zu S und T gehört; sie ist folglich mit W
identisch. Von den oben betrachteten Richtungen s, r gehört das Paa
r_1, s_1 zu S, das Paar r_1, s_2 zu T. Allgemeiner betrachten wir die Strahle
a, a_1 mit gleichen ν; die Strahlen a, a^* mit den Verhältniszahlen ν un
$\nu^* = \sigma : \nu$. Ist a beliebig, so gehören von den Paaren a, a^*; a, a_1^* da
eine der Involution S, das andere der Involution T an, so daß in (2
die Strahlen b, c das Paar in W mit $\nu = \sigma : \nu(a)$ bilden. Denn ein Dreie
in (P), von dem zwei Seiten zu a, a^* bzw. a, a_1^* parallel sind, verhäl
sich zum entsprechenden wie $\sigma = \nu \cdot \nu^*$; es muß also der eingeschlossen
Winkel bei der Transformation beibehalten oder in den supplementäre
übergeführt werden.

Mit diesen Bemerkungen sind wohl die Verhältnisse klargelegt, di
der oben besprochenen Definition der Affinität zugrunde liegen. I
Zusammenhang mit den angegebenen Darstellungen der Involutionen S, T, W

nnen noch folgende Konstruktionen erwähnt werden. Die Involutionen rden bei einer Ähnlichkeitstransformation nicht geändert und Fig. 3 t demnach für die allgemeine Affinität (und für irgend zwei projektive ahlenbüschel). Durch die Angabe in (P) von S sind daher alle Systeme ') definiert, die mit (P) affin und mit einem gewissen System (P_0') nlich sind. Um ein bestimmtes von diesen Systemen zu erhalten, hat an nur einem Paare in W einen Wert ν beizulegen. Z. B. kann der ert von σ angegeben werden oder, was auf dasselbe hinauskommt, der ert $\sqrt{\sigma}$ für die beiden Doppelstrahlen in S. Dabei ist zu bemerken, daß ese Doppelstrahlen immer reell sind, daß ihnen immer der Wert $\sqrt{\sigma}$ tspricht, wie auch (P') ähnlich transformiert wird, daß aber die Strahlen it $\nu = \sigma$ reell oder imaginär sein können. *Die Strahlen mit vorgebenem* ν können auf folgende Weise erhalten werden: Die Betrachtung nes Dreieckes in (P), von dem zwei Seiten zu a, a_1 parallel sind, und s entsprechenden in (P') liefert

$$\sigma = \nu^2 \sin\alpha : \sin\beta,$$

enn $\alpha = \Lambda(a, a_1)$, $\beta = \Lambda(a^*, a_1^*)$; für $\nu = 1$ geht diese Gleichung in (1) ber. Werden die Bezeichnungen so gewählt, daß die Punkte a, a_1^* auf c it S in einer Geraden liegen, so ist

$$\sigma : \nu^2 = \sin\alpha : \sin\beta = Sa : Sa^* = (Sa)^2 : (Sz)^2,$$

enn z der eine Doppelstrahl in S und Sz also die Tangente an c ist. *gilt also*

$$\nu(a) \cdot Sa = \text{const} = \delta;$$

bestimmt mit S die Affinität; aus $Sa = \delta : \nu(a)$ werden die beiden rahlen mit der Verhältniszahl $\nu(a)$ sofort konstruiert. Damit die finitätsachsen reell seien, muß $Sn \leqq \delta \leqq Sm$ sein.

Um ein bestimmtes Paar in S oder T, d. h. die Winkel in (P) *zu halten*, die von einer gegebenen Größe φ sind und Winkeln von der röße φ bzw. $\pi - \varphi$ in (P') entsprechen, hat man nur denjenigen mit c nzentrischen Kreis zu konstruieren, dessen Tangenten auf c den mit φ uivalenten Bogen abschneiden. Es gibt in T zwei reelle Lösungen für $z^* < \varphi < \pi/2$ (z, z^* die Doppelpunkte von S auf c), in S für $0 \leqq \varphi < \pi/2$. *ür einen beliebigen Winkel* $\psi = \Lambda(p, q) < \pi/2$ in (P), der von den albstrahlen p, q gebildet wird und keinen Rechtswinkelstrahl im Innern thält (auf welchen Fall die Frage, wie man leicht sieht, immer zurückführt werden kann) *gilt* $\psi \gtreqless \psi'$ (ψ' der entsprechende Winkel in (P')), *nachdem* $\nu(q) \gtreqless \nu(p^*)$ *ist.* Um den Sinn der Veränderung eines inkels bei der Transformation (z. B. bei einer Parallelprojektion) zu

erhalten, hat man also die Involution S zu bestimmen und den Drehungssinn eines Halbstrahles bei der Variation von ν zu deuten.

Wir hatten oben die Geraden l_s, l_t betrachtet, die den Kreis $\varkappa_s$ in den Punkten r, s schneiden. Die Diagonalpunkte des Vierecks $s_1 s_2 r_1 r_2$ sind S, T, W, wenn die drei Involutionen S, T, W an $\varkappa_s$ dargestellt werden. Stellt man nun umgekehrt die Aufgabe, bei gegebenen Kreisen $\varkappa_s$, $\varkappa_t$, zu einem gegebenen derartigen Dreieck STW das Viereck $s_i r_i$ zu bestimmen, so wird sie offenbar darauf zurückgeführt, in zwei ähnlichen Punktreihen auf ST die zu S und T harmonischen Paare aufzusuchen. Dies ist also die an die oben angestellten Betrachtungen sich anschließende *Bestimmung der mit* (P) *affinen und mit einem gegebenen Systeme* (P_0') *ähnlichen Systeme* (P'), *die in* (P) *in der gegebenen Richtung* q *parallelprojiziert werden können.*

(Eingegangen am 14. Januar 1920.)

Ein Satz über Culmannsche Trägheitsellipsen.

Von

Carl Heuman in Stockholm.

In einem Aufsatze, welcher vor mehreren Jahren in den Publikaonen der schwedischen Akademie der Wissenschaften erschienen ist[1]), habe h einige Betrachtungen über Trägheitsmomente von Punktsystemen vorelegt, die — obschon bei manchen geometrischen Fragen recht verwendar — bisher fast ganz unbeachtet geblieben sind. Neuerdings sind sie ber von G. Scheffers aus der Vergessenheit gerettet worden, indem er nen in seinem neuerschienenen Werke über darstellende Geometrie[2]) nen nicht unbeträchtlichen Platz eingeräumt hat. Dies veranlaßt mich, er eine kleine Verwendung derselben Betrachtungen mitzuteilen, die rer Einfachheit wegen vielleicht einiges Interesse beanspruchen kann.

Die dabei zu benutzenden Begriffe und Sätze aus jenem Aufsatze nd die folgenden.

Gegeben sei ein *ebenes* Punktsystem Σ, gebildet von einer endlichen nzahl im Endlichen gelegener Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Die Summe der uadrate der Abstände dieser Punkte von irgendeiner Achse in der Ebene t gleich dem Quadrat einer gewissen Länge, die der *Momentenradius* r Achse heißen mag. Dreht sich die Achse um einen ihrer Punkte O nd zieht man in jeder Lage Parallelen im Abstande des zugehörigen omentenradius, so umhüllen diese Parallelen eine Ellipse mit O als ittelpunkt. Sie mag die *Momentenellipse* dieses Punktes für das gebene Punktsystem Σ heißen. Enthält Σ nur zwei Punkte P_1, P_2, so nd die Strecken OP_1, OP_2 konjugierte Halbmesser dieser Ellipse.

---

[1]) *Über Trägheitsmomente von Punktsystemen und über eine fundamentale Aufbe in der Theorie der axonometrischen Abbildung*, Arkiv för matematik, astronomi h fysik, 2 (1905), Nr. 16.

[2]) *Lehrbuch der darstellenden Geometrie in zwei Bänden*, 1 (1919), Berlin . Springer).

Ist allgemeiner ein *räumliches* Punktsystem $\bar{\Sigma} = \bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n$ ge-
geben, so wird der Momentenradius einer Ebene auf dieselbe Art definiert.
Dreht sich die Ebene um einen ihrer Punkte $\bar{O}$ und legt man in jeder
Lage parallele Ebenen im Abstande gleich dem zugehörigen Momenten-
radius, so umhüllen diese Ebenen ein Ellipsoid mit $\bar{O}$ als Mittelpunkt.
Es mag das *Momentenellipsoid* dieses Punktes für das gegebene Punkt-
system $\bar{\Sigma}$ heißen[3]). Enthält $\bar{\Sigma}$ nur drei Punkte $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$, so sind die
Strecken $\bar{O}\bar{P}_1$, $\bar{O}\bar{P}_2$, $\bar{O}\bar{P}_3$ drei konjugierte Halbmesser dieses Ellipsoids.

Sind O, Σ die Projektionen von $\bar{O}, \bar{\Sigma}$ bei *Parallelprojektion* auf eine
Ebene, so bildet die Momentenellipse des Punktes O für das System Σ
gerade den *Umriß* des Momentenellipsoids des Punktes $\bar{O}$ für das Sy-
stem $\bar{\Sigma}$ in seiner durch die nämliche Projektion vermittelten Abbildung
auf dieselbe Ebene. Anders ausgedrückt ist also jene Ellipse die *Grenz-
des Schlagschattens*, den das Ellipsoid auf die Ebene des Systems Σ wirft,
wenn es durch parallele Lichtstrahlen von der Richtung $\bar{O}O$ beleuch-
tet wird.

* * *

Nun sei eine ebene Figur mit der Fläche F gegeben. Ist $F \cdot i^2$ das
Trägheitsmoment dieser Fläche in bezug auf irgendeine Achse in der
Figurenebene, so wird die Länge i bekanntlich der *Trägheitsradius* dieser
Achse genannt. Dreht sich die Achse um einen ihrer Punkte O und zieht
man in jeder Lage Parallelen im Abstande gleich dem zugehörigen Träg-
heitsradius, so umhüllen diese Parallelen eine Ellipse mit O als Mittel-
punkt. Sie heißt die *Culmannsche Trägheitsellipse* für diesen Punkt[4]).
Für jeden Punkt der Figurenebene erhält man eine solche Ellipse; ins-
besondere wird diese Kurve für den Schwerpunkt der gegebenen Fläche
die *Zentralellipse* genannt.

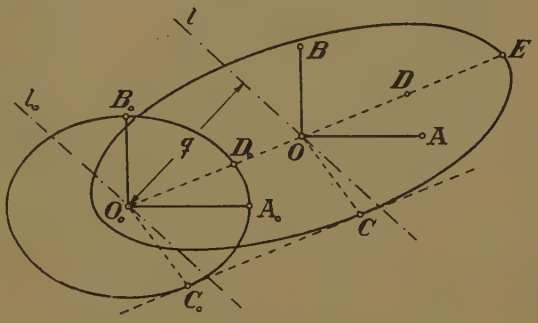
Es sei O_0 dieser Schwerpunkt, und O_0A_0, O_0B_0 seien die Halbachsen
der Zentralellipse. Diese ist dann auch die Momentenellipse des Punk-
tes O_0 für das Punktsystem A_0, B_0.

Wir verschieben nun die Figur $O_0A_0B_0$ in einer beliebigen Richtung
in der Figurenebene parallel mit sich, so daß sie eine neue Lage OAB er-
hält. Legen wir durch O und O_0 parallele Achsen l und l_0 mit dem
Abstande q und sind i, i_0 die zugehörigen Trägheitsradien, so stehen
diese bekanntlich in der Beziehung $i^2 = i_0^2 + q^2$. Es ist aber i_0 nach
dem eben Gesagten gleich dem Momentenradius der Achse l_0 für das

[3]) Die Benennungen Momentenradius, Momentenellipse und Momentenellipsoid kommen in dem erwähnten Aufsatz nicht vor. Der Name Momentenellipse ist von Scheffers eingeführt (S. 128 in der zitierten Arbeit); die beiden anderen sind diesem nachgebildet.

[4]) Vgl. z. B. Hamel, *Elementare Mechanik*, Leipzig (Teubner), 1912, S. 386 u.

unktsystem A_0, B_0 oder der Achse l für das Punktsystem A, B, und her wird i gleich dem Momentenradius der Achse l für das Punktsystem , B, O_0. Daraus folgt, aß *die Culmannsche rägheitsellipse für den unkt O mit der Momenellipse dieses Punktes r das Punktsystem A, , O_0 zusammenfällt*[5]).



Wir verschieben fer- er dieselbe Figur $O_0A_0B_0$ n eine beliebige Strecke $_0\bar{O}$ parallel mit sich in er zur Figurenebene *senkrechten* Richtung und bezeichnen sie in der so reichten neuen Lage mit $\bar{O}\,\bar{A}\,\bar{B}$. Wir betrachten dann das Ellipsoid mit em Mittelpunkt $\bar{O}$ und den Halbachsen $\bar{O}\bar{A}$, $\bar{O}\bar{B}$, $\bar{O}O_0$. Es ist das omentenellipsoid des Punktes $\bar{O}$ für das Punktsystem $\bar{A}$, $\bar{B}$, O_0.

Werden nun diese Punkte $\bar{O}$, $\bar{A}$, $\bar{B}$, O_0 durch Parallelprojektion in er Richtung $\bar{O}O$ auf die Figurenebene projiziert, so fallen die Projekonen nach O, A, B, O_0. Bei Beleuchtung durch parallele Lichtstrahlen on der Richtung $\bar{O}O$ wirft also das betrachtete Ellipsoid auf die Figurenene einen Schlagschatten, dessen Grenze mit der Momentenellipse des unktes O für das Punktsystem A, B, O_0 zusammenfällt und somit, nach em Obigen, mit der Culmannschen Trägheitsellipse für O identisch ist.

Wir haben also den folgenden Satz bewiesen:

Eine ebene Fläche sei gegeben und ihre Zentralellipse konstruiert. Man denke sich ein Ellipsoid mit einem Hauptschnitt gleich der Zentralellipse[6]) *so auf die Figurenebene gelegt, daß es diese in dem Schwerunkt O_0 der gegebenen ebenen Fläche berührt und daß sich der erähnte Hauptschnitt senkrecht in die Zentralellipse projiziert. Es sei $\bar{O}$ er Mittelpunkt dieses Ellipsoids und O ein beliebiger Punkt der Figurenene. Bei Beleuchtung durch parallele Lichtstrahlen von der Richtung*

[5]) Anstatt der Halbachsen O_0A_0, O_0B_0 kann irgendein anderes Paar konjugierr Halbmesser O_0C_0, O_0D_0 der Zentralellipse benutzt werden. Liegt dabei D_0 inssondere auf O_0O, so wird die Trägheitsellipse für O mit der Momentenellipse eses Punktes für das Punktsystem C, D, O_0 oder C, E identisch, wenn E auf O_0O bestimmt wird, daß $OE^2 = OD^2 + OO_0^2$. Die Strecken OC, OE sind demnach njugierte Halbmesser; die zu O_0O parallele Gerade C_0C ist eine gemeinsame Tannte beider Ellipsen.

[6]) Die Länge der dritten Halbachse des Ellipsoids kann willkürlich gewählt rden, also z. B. auch so, daß man ein Umdrehungsellipsoid erhält.

$\bar{O}O$ wirft dies Ellipsoid auf die Figurenebene einen Schlagschatten, dessen Grenze eine Ellipse mit dem Mittelpunkt O ist. Diese Ellipse ist gerade die Culmannsche Trägheitsellipse für den Punkt O.

Die zu den verschiedenen Punkten der Figurenebene gehörigen Culmannschen Trägheitsellipsen sind also die Schlagschattengrenzen des erwähnten Ellipsoids bei Parallelbeleuchtung in verschiedenen Richtungen. Dadurch sind die Lagenbeziehungen zwischen diesen Kurven in einfachster Weise gekennzeichnet. Man sieht z. B. sofort, daß sie alle den Schwerpunkt (den Berührungspunkt des Ellipsoids mit der Figurenebene) umschließen müssen. Ebenso erkennt man unmittelbar, daß es unter diesen Ellipsen im allgemeinen zwei Kreise geben muß (die Mohrschen Kreise) und welche Lagen diese haben. Usf.

Stockholm, Technische Hochschule, im November 1919.

(Eingegangen am 14. Januar 1920.)

Zur Theorie der Summengleichungen.

Von

Oskar Perron in Heidelberg.

Als Summengleichung bezeichnet Herr Horn[1]) das folgende lineare leichungssystem:

$$x_\nu - a_{\nu 1} x_{\nu+1} - a_{\nu 2} x_{\nu+2} - \ldots = c_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

s ist das ein besonderes System von linearen Gleichungen mit unendlich elen Unbekannten, und zwar ist es dadurch charakterisiert, daß die oeffizienten links von der „Diagonale" alle verschwinden. Die Koeffienten der Diagonale selbst sind von Null verschieden und können daher, ie oben bereits geschehen, gleich 1 angenommen werden.

Sind alle $c_\nu = 0$, und für $\mu \geqq 3$ auch $a_{\nu\mu} = 0$, so entsteht das leichungssystem

$$x_\nu = a_{\nu 1} x_{\nu+1} + a_{\nu 2} x_{\nu+2},$$

elches mit der Theorie der Kettenbrüche bekanntlich in engstem Zummenhang steht. Ebenso erhält man, wenn die Gleichung $a_{\nu\mu} = 0$ erst r $\mu \geqq n+2$ besteht, das System

$$x_\nu = a_{\nu 1} x_{\nu+1} + a_{\nu 2} x_{\nu+2} + \ldots + a_{\nu, n+1} x_{\nu+n+1},$$

elches in einfacher Weise mit der Theorie der Jacobi-Ketten n-ter rdnung zusammenhängt[2]). Man könnte daher die allgemeine homogene mmengleichung auch als Jacobi-Kette unendlich hoher Ordnung bechnen.

[1]) J. Horn, Volterrasche Integralgleichungen und Summengleichungen. Journal r die reine und angewandte Mathematik, **140** (1911), S. 120—174. — Analytische sungen von Summengleichungen. Archiv der Mathematik und Physik, 3. Reihe, **26** 918), S. 132—145.

[2]) Darüber vergleiche man meine Arbeiten: Grundlagen für eine Theorie des cobischen Kettenbruchalgorithmus (Habilitationsschrift), Mathematische Annalen, (1906), S. 1—76; Über die Konvergenz der Jacobi-Kettenalgorithmen mit komexen Elementen. Sitzungsberichte der bayer. Akademie der Wissenschaften, **37** (1907), 401—482.

Auf Summengleichungen bin ich in meinen Arbeiten über linear Differenzen- und Differentialgleichungen wiederholt geführt worden. Al Selbstzweck hat sie außer Herrn Horn auch Herr Helge von Koc studiert[3]). Ich behandle im folgenden homogene und inhomogene Sum mengleichungen. Von den Koeffizienten $a_{\nu,\mu}$ wird zuerst vorausgesetzt daß ihre Doppelreihe absolut konvergiert; sodann wird auch der Fall be handelt, daß in einer Parallelreihe zur Diagonale lauter Elemente — stehen[4]), während die Doppelreihe der übrigen absolut konvergiert. Ge sucht werden in jedem Fall solche Lösungen x_ν, welche beschränkt sind Im ersten Fall ergeben sich die bekannten Resultate, die man sonst mi Hilfe unendlicher Determinanten herleitet (Satz 1 und Satz 3). Im zweite Fall versagt diese Methode; auch gibt es dann, obwohl die Nennerdeter minante von Null verschieden, nämlich gleich 1 ist, mehrere linear unab hängige Lösungen.

Bei dem Spezialfall der Kettenbrüche handelt es sich offenbar, nachdem die Parallelreihe mit den Elementen -1 unmittelbar neben de Diagonale liegt oder durch eine andere Parallelreihe von ihr getrennt ist um Kettenbrüche der Form

$$1+\frac{a_1|}{|1}+\frac{a_2|}{|1}+\frac{a_3|}{|1}+\cdots.$$

bzw. der Form

$$b_0+\frac{1|}{|b_1}+\frac{1|}{|b_2}+\ldots,$$

wobei die Reihen $\sum|a_\nu|$, $\sum|b_\nu|$ konvergieren. Bei dem ersten Kettenbruch streben bekanntlich die Näherungszähler und -nenner je für sich einem Grenzwert zu, die nicht beide verschwinden. Im zweiten Fa nähern sich die Näherungszähler und -nenner ungerader Ordnung je einem Grenzwert, ebenso die Näherungszähler und -nenner gerader Ordnung, un die Determinante dieser vier Grenzwerte ist 1[5]). Analogien zu diesen Sätzen wird man in den folgenden Entwicklungen erkennen.

---

[3]) H. von Koch: On regular and irregular solutions of some infinite syste of linear equations. — Proceedings of the fifth international congress of mathema cians, 1 (1912), S. 352–365.

[4]) Oder allgemeiner: Die Elemente der Parallelreihe dürfen auch von -1 ve schieden sein, wenn nur die Reihe ihrer Unterschiede von -1 absolut konvergie Übrigens könnte man, indem man die Unbekannten teilweise ihr Vorzeichen ände läßt, auch den Wert $+1$ an Stelle von -1 erreichen.

[5]) Vgl. des Verfassers Buch: Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 191 S. 345 f. und S. 235, Satz 6.

§ 1.

Wir entwickeln zunächst einige allgemeine Formeln, wobei wir die x_μ als unabhängige Variable betrachten; Konvergenzfragen spielen dabei eine Rolle. Wenn man aus den ν Gleichungen

$$x_0 = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{0\mu} x_\mu, \quad x_1 = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{1\mu} x_{\mu+1}, \quad \ldots, \quad x_{\nu-1} = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\nu-1,\mu} x_{\mu+\nu-1}$$

e $\nu-1$ Größen $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}$ eliminiert, indem man für jedes $x_{\lambda-1}$ en Wert aus der λ-ten Gleichung in die rechte Seite der vorausgehenden nsetzt, entsteht die Formel

$$x_0 = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\nu\mu} x_{\mu+\nu-1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

obei die $A_{\nu\mu}$ gewisse rationale ganze Funktionen der $a_{\varrho\sigma}$ sind. Die leichung (1) gilt auch noch für $\nu = 0$, wenn wir definieren:

$$A_{01} = 1, \quad A_{0,\mu} = 0 \text{ für } \mu \geqq 2.$$

Wenn man in der Funktion $A_{\nu\mu}$ den ersten Index aller $a_{\varrho\sigma}$ um eine ahl λ vermehrt, so soll die entstehende Funktion mit $A_{\nu\mu}^{(\lambda)}$ bezeichnet erden, so daß insbesondere $A_{\nu\mu}^{(0)} = A_{\nu\mu}$ sein wird. Dann ist analog zu (1)

$$x_\lambda = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\nu\mu}^{(\lambda)} x_{\lambda+\mu+\nu-1},$$

nd analog zu (2) wird auch gesetzt:

$$A_{01}^{(\lambda)} = 1, \quad A_{0\mu}^{(\lambda)} = 0 \text{ für } \mu \geqq 2.$$

ußerdem ist augenscheinlich

$$A_{1\mu}^{(\lambda)} = a_{\lambda\mu}.$$

Für die Funktionen $A_{\nu\mu}^{(\lambda)}$ gelten mannigfache Rekursionsformeln, von enen wir die wichtigsten herleiten wollen. Nach (1) ist, wenn λ statt ν eschrieben wird,

$$x_0 = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\lambda\mu} x_{\lambda+\mu-1} = \sum_{\varkappa=1}^{\nu} A_{\lambda\varkappa} x_{\lambda+\varkappa-1} + \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\lambda,\mu+\nu} x_{\lambda+\mu+\nu-1}.$$

erner nach (3), wenn man daselbst die Zahlen λ, ν durch $\lambda+\varkappa-1$, $-\varkappa+1$ ersetzt:

$$x_{\lambda+\varkappa-1} = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\nu-\varkappa+1,\mu}^{(\lambda+\varkappa-1)} x_{\lambda+\mu+\nu-1}.$$

Setzt man diesen Ausdruck für $x_{\lambda+\varkappa-1}$ in die vorausgehende Formel ein, so folgt:

$$x_0 = \sum_{\mu=1}^{\infty}\Big(\sum_{\varkappa=1}^{\nu} A_{\lambda\varkappa} A_{\nu-\varkappa+1,\mu}^{(\lambda+\varkappa-1)} + A_{\lambda,\mu+\nu}\Big) x_{\lambda+\mu+\nu-1}.$$

Anderseits ist nach (1), wenn man ν durch $\lambda+\nu$ ersetzt,

$$x_0 = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\lambda+\nu,\mu}\, x_{\lambda+\mu+\nu-1},$$

und durch Vergleich mit der vorigen Formel ergibt sich die wichtige Beziehung

$$A_{\lambda+\nu,\mu} = \sum_{\varkappa=1}^{\nu} A_{\lambda\varkappa} A_{\nu-\varkappa+1,\mu}^{(\lambda+\varkappa-1)} + A_{\lambda,\mu+\nu}. \tag{6}$$

Speziell für $\lambda=1$ folgt hieraus mit Rücksicht auf (5):

$$A_{\nu+1,\mu} = \sum_{\varkappa=1}^{\nu} a_{0k} A_{\nu-\varkappa+1,\mu}^{(\varkappa)} + a_{0,\nu+\mu}, \tag{7}$$

und wenn man die ersten Indizes aller a um λ erhöht:

$$A_{\nu+1,\mu}^{(\lambda)} = \sum_{\varkappa=1}^{\nu} a_{\lambda\varkappa} A_{\nu-\varkappa+1,\mu}^{(\lambda+\varkappa)} + a_{\lambda,\nu+\mu}. \tag{8}$$

Für $\nu=1$ folgt aus (6):

$$A_{\lambda+1,\mu} = a_{\lambda\mu} A_{\lambda 1} + A_{\lambda,\mu+1}, \tag{9}$$

und wenn man hier die Zahlen λ, μ durch $\nu-\iota$, $\mu+\iota-1$ ersetzt:

$$A_{\nu-\iota+1,\mu+\iota-1} = a_{\nu-\iota,\mu+\iota-1} A_{\nu-\iota,1} + A_{\nu-\iota,\mu+\iota}.$$

Summiert man von $\iota=1$ bis $\iota=j$ $(\leqq\nu)$, so ergibt sich:

$$A_{\nu\mu} = \sum_{\iota=1}^{j} a_{\nu-\iota,\mu+\iota-1} A_{\nu-\iota,1} + A_{\nu-j,\mu+j} \qquad (1\leqq j\leqq\nu) \tag{10}$$

Und wenn man wieder die vorderen Indizes aller a um λ vermehrt:

$$A_{\nu\mu}^{(\lambda)} = \sum_{\iota=1}^{j} a_{\nu+\lambda-\iota,\mu+\iota-1} A_{\nu-\iota,1}^{(\lambda)} + A_{\nu-j,\mu+j}^{(\lambda)} \qquad (1\leqq j\leqq\nu) \tag{11}$$

Speziell für $j=\nu$ fällt in den Formeln (10) und (11) das letzte Glied weg (wegen (2) und (4)), und man erhält:

$$A_{\nu\mu} = \sum_{\iota=1}^{\nu} a_{\nu-\iota,\mu+\iota-1} A_{\nu-\iota,1}, \tag{12}$$

$$A_{\nu\mu}^{(\lambda)} = \sum_{\iota=1}^{\nu} a_{\nu+\lambda-\iota,\mu+\iota-1} A_{\nu-\iota,1}^{(\lambda)}. \tag{13}$$

so insbesondere für $\mu = 1$:

4) $$A_{\nu 1} = \sum_{\iota=1}^{\nu} a_{\nu-\iota,\iota} A_{\nu-\iota,1},$$

5) $$A_{\nu 1}^{(\lambda)} = \sum_{\iota=1}^{\nu} a_{\nu+\lambda-\iota,\iota} A_{\nu-\iota,1}^{(\lambda)}.$$

Gleichung (14) ist eine einfache Rekursionsformel zur Berechnung r Funktionen $A_{\nu 1}$, nachdem ja $A_{01} = 1$ bekannt ist. Sodann ergibt h aus (12) auch $A_{\nu\mu}$. Die Formeln dieses Paragraphen scheinen mir s notwendige Rüstzeug für eine selbständige Theorie der Summenichungen zu sein.

§ 2.

Satz 1. *Die homogene Summengleichung*

$$x_\nu = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\nu\mu} x_{\mu+\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

t, wenn die Doppelreihe $\sum |a_{\nu\mu}|$ konvergiert, keine andere beschränkte ösung als die triviale $x_\nu = 0$.

Beweis. Setzt man

$$\sum_{\iota=1}^{\nu} |a_{\nu-\iota,\iota}| = \gamma_\nu,$$

ergibt sich aus unseren Voraussetzungen die Konvergenz der Reihe $\sum \gamma_\nu$. aher ist gewiß $\gamma_\nu < 1$, sobald ν genügend groß, etwa für $\nu \geqq n$. Setzt an weiter

$$\operatorname*{Max}_{\nu+\lambda \leqq p} |A_{\nu 1}^{(\lambda)}| = M_p,$$

daß $M_0 = 1$, $M_{p+1} \geqq M_p$ ist, so folgt aus (15) für $\nu \geqq 1$:

$$|A_{\nu 1}^{(\lambda)}| \leqq \sum_{\iota=1}^{\nu} |a_{\nu+\lambda-\iota,\iota} A_{\nu-\iota,1}^{(\lambda)}| \leqq M_{\nu+\lambda-1} \sum_{\iota=1}^{\nu} |a_{\nu+\lambda-\iota,\iota}| \leqq M_{\nu+\lambda-1} \gamma_{\nu+\lambda}.$$

so, wenn $\nu \geqq 1$ ist,

$$|A_{\nu 1}^{(\lambda)}| \leqq M_{\nu+\lambda-1} \quad \text{für} \quad \nu+\lambda \geqq n.$$

fenbar gilt das aber auch für $\nu = 0$, und daher wird schließlich

$$M_{\nu+\lambda} = M_{\nu+\lambda-1} \quad \text{für} \quad \nu+\lambda \geqq n.$$

tzt man also $M_{n-1} = C$, so ist für $p \geqq n$ auch $M_p = C$, und daher

$$|A_{\nu 1}^{(\lambda)}| \leqq C$$

für alle ν und λ. Nach (13) ist dann

$$|A_{\nu\mu}^{(\lambda)}| \leqq C \sum_{\iota=1}^{\nu} |a_{\nu+\lambda-\iota,\mu+\iota-1}| \leqq C\gamma_{\nu+\lambda+\mu-1}.$$

Daher konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} |A_{\nu\mu}^{(\lambda)}| = B_{\nu}^{(\lambda)},$$

und wird bei festgehaltenem λ mit wachsendem ν beliebig klein. Nun folgt aber aus (3), wenn die x_ν beschränkt sind, so daß etwa $|x_\nu| < G$ ist,

$$|x_\lambda| \leqq G \sum_{\mu=1}^{\infty} |A_{\nu\mu}^{(\lambda)}| = GB_{\nu}^{(\lambda)}.$$

Da dies für beliebig große ν gilt, und da die rechte Seite mit wachsendem ν beliebig klein wird, folgt sogleich: $x_\lambda = 0$. W. z. b. w.

Bemerkung. Der Satz ist natürlich nicht mehr richtig, wenn auf die Beschränktheit der Lösung verzichtet wird. Beispielsweise hat ja die Summengleichung

$$x_\nu = \frac{1}{(\nu+1)^2} x_{\nu+1},$$

welche sonst unsere Voraussetzungen erfüllt, die Lösung $x_\nu = (\nu!)^2$.

§ 3.

Satz 2. *Die homogene Summengleichung*

$$x_\nu = x_{\nu+k} + \sum_{\mu=1}^{\infty} b_{\nu\mu} x_{\mu+\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

hat, wenn die Doppelreihe $\sum |b_{\nu\mu}|$ *konvergiert, genau k linear unabhängige beschränkte Lösungen. Ist nämlich* $\varkappa$ *eine der Zahlen* $0, 1, \ldots, k-1$, *so gibt es eine Lösung* $x_\nu = x_{\nu\varkappa}$, *bei welcher*

$$\lim_{\mu=\infty} x_{\varkappa+\mu k,\varkappa} = 1,$$

$$\lim_{\mu=\infty} x_{\lambda+\mu k,\varkappa} = 0 \quad \text{für} \quad \lambda \equiv \varkappa \pmod{k}$$

ist, und diese k Lösungen $x_{\nu 0}, x_{\nu 1}, \ldots, x_{\nu,k-1}$ *sind linear unabhängig.*

Beweis. In den Formeln des § 1 ist jetzt

$$a_{\nu\mu} = b_{\nu\mu} \quad \text{für} \quad \mu \neq k,$$

$$a_{\nu k} = b_{\nu k} + 1$$

zu setzen. Die Formel (15) geht daher über in die beiden:

6) $$A_{\nu 1}^{(\lambda)} = \sum_{\iota=1}^{\nu} b_{\nu+\lambda-\iota,\iota} A_{\nu-\iota,1}^{(\lambda)} \qquad \text{für} \quad \nu < k,$$

7) $$A_{\nu 1}^{(\lambda)} = \sum_{\iota=1}^{\nu} b_{\nu+\lambda-\iota,\iota} A_{\nu-\iota,1}^{(\lambda)} + A_{\nu-k,1}^{(\lambda)} \quad \text{für} \quad \nu \geqq k.$$

tzt man diesmal

$$\sum_{\iota=1}^{\nu} |b_{\nu-\iota,\iota}| = \gamma_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

konvergiert nach Voraussetzung die Reihe $\sum \gamma_\nu$, also auch das Produkt

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} (1+\gamma_\nu) = C.$$

s (16) und (17) folgt daher, wenn

$$\operatorname{Max}_{\iota=1}^{\nu} |A_{\nu-\iota,1}^{(\lambda)}| = M_{\nu-1}^{(\lambda)}$$

setzt wird:

$$|A_{\nu,1}^{(\lambda)}| \leqq (1+\gamma_{\nu+\lambda}) M_{\nu-1}^{(\lambda)};$$

o auch

$$M_\nu^{(\lambda)} = \operatorname{Max}(|A_{\nu,1}^{(\lambda)}|, M_{\nu-1}^{(\lambda)}) \leqq (1+\gamma_{\nu+\lambda}) M_{\nu-1}^{(\lambda)}.$$

her, weil $M_0^{(\lambda)} = A_{01}^{(\lambda)} = 1$ ist:

$$M_\nu^{(\lambda)} \leqq (1+\gamma_{\lambda+1})(1+\gamma_{\lambda+2}) \ldots (1+\gamma_{\lambda+\nu}) \leqq C.$$

lglich ist auch diesmal

$$|A_{\nu 1}^{(\lambda)}| \leqq C.$$

Aus (17) folgt dann, wenn man ν durch $\varkappa + \nu k - \lambda$ ersetzt und das zte Glied von rechts nach links bringt:

$$|A_{\varkappa+\nu k-\lambda,1}^{(\lambda)} - A_{\varkappa+(\nu-1)k-\lambda,1}^{(\lambda)}| \leqq C \sum_{\iota=1}^{\varkappa+\nu k-\lambda} |b_{\varkappa+\nu k-\iota,\iota}| \leqq C \gamma_{\varkappa+\nu k}.$$

raus ergibt sich ohne weiteres die Existenz der Grenzwerte

8) $$\lim_{\nu=\infty} A_{\varkappa+\nu k-\lambda,1}^{(\lambda)} = x_{\lambda\varkappa},$$

d für sie zugleich die Abschätzung:

9) $$|x_{\lambda\varkappa} - A_{\varkappa+\mu k-\lambda,1}^{(\lambda)}| \leqq C \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} \gamma_{\varkappa+\nu k}.$$

Die Größen $x_{\lambda\varkappa}$ bleiben offenbar ungeändert, wenn man den zweiten dex modulo k ändert, so daß wir die Betrachtung auf $x_{\lambda 0}, x_{\lambda 1}, \ldots, x_{\lambda,k-1}$

beschränken dürfen. Wir wollen nachweisen, daß das gerade die in Satz 2 behaupteten Lösungen der Summengleichung sind.

Schreibt man in (19) $\varkappa - \lambda + \mu k$ an Stelle von λ, so folgt:

$$|x_{\varkappa-\lambda+\mu k,\varkappa} - A_{\lambda 1}^{(\varkappa-\lambda+\mu k)}| \leqq C \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} \gamma_{\varkappa+\nu k},$$

und da die rechte Seite mit wachsendem μ beliebig klein wird, ergibt sich

$$\lim_{\mu=\infty} (x_{\varkappa-\lambda+\mu k,\varkappa} - A_{\lambda 1}^{(\varkappa-\lambda+\mu k)}) = 0. \tag{20}$$

Für $\lambda = 0$ folgt hieraus speziell:

$$\lim_{\mu=\infty} x_{\varkappa+\mu k,\varkappa} = 1. \tag{21}$$

Dagegen ist für $\lambda = 1, 2, \ldots, k-1$ nach (16)

$$|A_{\lambda 1}^{(\varkappa-\lambda+\mu k)}| = \Big| \sum_{\iota=1}^{\lambda} b_{\varkappa+\mu k-\iota,\iota} A_{\lambda-\iota,1}^{(\varkappa-\lambda+\mu k)} \Big| \leqq C \gamma_{\varkappa+\mu k}.$$

Da die rechte Seite mit wachsendem μ beliebig klein wird, hat auch die linke den Grenzwert Null, und aus (20) folgt dann:

$$\lim_{\mu=\infty} x_{\varkappa-\lambda+\mu k,\varkappa} = 0 \quad \text{für} \quad \lambda = 1, 2, \ldots, k-1;$$

oder was offenbar dasselbe ist:

$$\lim_{\mu=\infty} x_{\lambda+\mu k,\varkappa} = 0 \quad \text{für} \quad \lambda \not\equiv \varkappa \pmod{k}. \tag{22}$$

Damit ist die in Satz 2 behauptete Grenzbeziehung für die $x_{\lambda\varkappa}$ nachgewiesen. Um auch zu zeigen, daß die $x_{\lambda\varkappa}$ die Summengleichung lösen, gehen wir von der Formel (8) aus, die speziell für $\nu > k$ und $\mu = 1$ jetzt die folgende Gestalt annimmt:

$$A_{\nu+1,1}^{(\lambda)} = \sum_{\iota=1}^{\nu} b_{\lambda\iota} A_{\nu-\iota+1,1}^{(\lambda+\iota)} + b_{\lambda,\nu+1} + A_{\nu-k+1,1}^{(\lambda+k)}$$

$$= \sum_{\iota=1}^{\nu+1} b_{\lambda\iota} A_{\nu-\iota+1,1}^{(\lambda+\iota)} + A_{\nu-k+1,1}^{(\lambda+k)}.$$

Also, wenn p eine beliebig große positive ganze Zahl ist, für $\nu + 1 > p$

$$|A_{\nu+1,1}^{(\lambda)} - A_{\nu-k+1,1}^{(\lambda+k)} - \sum_{\iota=1}^{p} b_{\lambda\iota} A_{\nu-\iota+1,1}^{(\lambda+\iota)}| \leqq \sum_{\iota=p+1}^{\nu+1} |b_{\lambda\iota} A_{\nu-\iota+1,1}^{(\lambda+\iota)}|$$

$$\leqq C \sum_{\iota=p+1}^{\nu+1} |b_{\lambda\iota}| \leqq C \sum_{\iota=p+1}^{\infty} |b_{\lambda\iota}|.$$

zt man hier $\varkappa + \nu k - \lambda - 1$ an Stelle von ν, so kommt:

$$|A^{(\lambda)}_{\varkappa+\nu k-\lambda,1} - A^{(\lambda+k)}_{\varkappa+(\nu-1)k-\lambda,1} - \sum_{\iota=1}^{p} b_{\lambda\iota} A^{(\lambda+\iota)}_{\varkappa+\nu k-\lambda-\iota,1}| \leqq C \sum_{\iota=p+1}^{\infty} |b_{\lambda\iota}|,$$

raus für $\nu \to \infty$ wegen (18) folgt:

$$|x_{\lambda\varkappa} - x_{\lambda+k,\varkappa} - \sum_{\iota=1}^{p} b_{\lambda\iota} x_{\lambda+\iota,\varkappa}| \leqq C \sum_{\iota=p+1}^{\infty} |b_{\lambda\iota}|.$$

r wachsende p wird hier die rechte Seite beliebig klein, so daß sich ergibt:

$$x_{\lambda\varkappa} = x_{\lambda+k,\varkappa} + \sum_{\iota=1}^{\infty} b_{\lambda\iota} x_{\lambda+\iota,\varkappa}.$$

mit sind $x_{\lambda 0}, x_{\lambda 1}, \ldots, x_{\lambda,k-1}$ in der Tat k Lösungen unserer Summenichung. Daß sie linear unabhängig sind, ergibt sich aus der Determinante

$$\begin{vmatrix} x_{\mu k,0} & x_{\mu k+1,0} & \cdots & x_{\mu k+k-1,0} \\ x_{\mu k,1} & x_{\mu k+1,1} & \cdots & x_{\mu k+k-1,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{\mu k,k-1} & x_{\mu k+1,k-1} & \cdots & x_{\mu k+k-1,k-1} \end{vmatrix}$$

nn diese nähert sich nach (21) und (22) für $\mu \to \infty$ dem Grenzwert 1, also für genügend große Werte von μ gewiß von Null verschieden.

Nun bleibt noch zu zeigen, daß es keine von den gefundenen unabngige beschränkte Lösung gibt, daß also jede beschränkte Lösung in r Form

$$x_\lambda = \sum_{\varkappa=0}^{k-1} c_\varkappa x_{\lambda\varkappa}$$

thalten ist. Aus (11) folgt für $\mu = 1$ und $j = 1, 2, \ldots, k-1$, wenn $\geqq j$ ist:

$$A^{(\lambda)}_{\nu 1} = \sum_{\iota=1}^{j} b_{\nu+\lambda-\iota,\iota} A^{(\lambda)}_{\nu-\iota,1} + A^{(\lambda)}_{\nu-j,j+1};$$

d hieraus:

$$\lim_{\nu=\infty} (A^{(\lambda)}_{\nu 1} - A^{(\lambda)}_{\nu-j,j+1}) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k-1),$$

s aber offenbar auch für $j = 0$ noch richtig bleibt. Daher insbesondere, nn $\nu k + \varkappa - \lambda$ an Stelle von ν, und $\varkappa - 1$ an Stelle von j geschrieben rd, mit Rücksicht auf (18):

$$\lim_{\nu=\infty} A^{(\lambda)}_{1+\nu k-\lambda,\varkappa} = \lim_{\nu=\infty} A^{(\lambda)}_{\nu k+\varkappa-\lambda,1} = x_{\lambda\varkappa}.$$

Für $\mu > k$ folgt aus (13):

$$A^{(\lambda)}_{\nu\mu} = \sum_{\iota=1}^{\nu} b_{\nu+\lambda-\iota,\mu+\iota-1} A^{(\lambda)}_{\nu-\iota,1};$$

daher ist

$$|A_{\nu\mu}^{(\lambda)}| \leqq C \sum_{\iota=1}^{\nu} |b_{\nu+\lambda-\iota,\mu+\iota-1}| \leqq C\,\gamma_{\nu+\lambda+\mu-1},$$

und folglich konvergiert die Reihe

$$\sum_{\mu=k+1}^{\infty} |A_{\nu\mu}^{(\lambda)}|,$$

und ihr Wert wird bei festem λ mit wachsendem ν beliebig klein.

Wenn nun die x_ν beschränkt sind, etwa $|x_\nu| < G$, so folgt aus (3

$$|x_\lambda - \sum_{\mu=1}^{k} A_{\nu\mu}^{(\lambda)} x_{\lambda+\mu+\nu-1}| = |\sum_{\mu=k+1}^{\infty} A_{\nu\mu}^{(\lambda)} x_{\lambda+\mu+\nu-1}| \leqq G \sum_{\mu=k+1}^{\infty} |A_{\nu\mu}^{(\lambda)}|.$$

Also, da die rechte Seite mit wachsendem ν beliebig klein wird:

$$x_\lambda = \lim_{\nu=\infty} \sum_{\mu=1}^{k} A_{\nu\mu}^{(\lambda)} x_{\lambda+\mu+\nu-1}.$$

Daher ist insbesondere auch, indem ν durch $1+\nu k-\lambda$, und μ durch ersetzt wird,

$$x_\lambda = \lim_{\nu=\infty} \sum_{\varkappa=1}^{k} A_{1+\nu k-\lambda,\varkappa}^{(\lambda)} x_{\varkappa+\nu k},$$

also mit Rücksicht auf (24), und weil die $x_{\varkappa+\nu k}$ beschränkt sind,

$$x_\lambda = \lim_{\nu=\infty} \sum_{\varkappa=1}^{k} x_{\lambda\varkappa} x_{\varkappa+\nu k}. \tag{25}$$

Schreibt man $\mu k+\lambda$ an Stelle von λ, so folgt schließlich:

$$x_{\mu k+\lambda} = \lim_{\nu=\infty} \sum_{\varkappa=1}^{k} x_{\mu k+\lambda,\varkappa} x_{\varkappa+\nu k}.$$

Indem man hier für λ der Reihe nach die Werte $0, 1, \ldots, k-$ setzt, und beachtet, daß die Determinante (23) für genügend große gewiß von Null verschieden ist, erkennt man die Existenz der folgend Grenzwerte:

$$\lim_{\nu=\infty} x_{\varkappa+\nu k} = c_\varkappa,$$

wobei der Index von $c_\varkappa$ offenbar modulo k geändert werden darf. Se man das in (25) ein, so folgt:

$$x_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{k} c_\varkappa x_{\lambda\varkappa} = \sum_{\varkappa=0}^{k-1} c_\varkappa x_{\lambda\varkappa},$$

womit nun alles bewiesen ist.

§ 4.

Wir wenden uns jetzt zu der *inhomogenen* Summengleichung

$$x_\nu = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\nu\mu} x_{\mu+\nu} + c_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

nd zeigen, daß unter gewissen Bedingungen die Reihe

$$x_\nu = \sum_{\varkappa=0} c_{\nu+\varkappa} A_{\varkappa 1}^{(\nu)}$$

ne beschränkte Lösung ist. In der Tat ergibt sich aus (27) zunächst rmal

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\nu\mu} x_{\mu+\nu} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} a_{\nu\mu} c_{\mu+\nu+\varkappa} A_{\varkappa 1}^{(\mu+\nu)}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\varkappa=\mu}^{\infty} a_{\nu\mu} c_{\nu+\varkappa} A_{\varkappa-\mu,1}^{(\mu+\nu)}$$

$$= \sum_{\varkappa=1}^{\infty} c_{\nu+\varkappa} \sum_{\mu=1}^{\varkappa} a_{\nu\mu} A_{\varkappa-\mu,1}^{(\mu+\nu)}$$

$$= \sum_{\varkappa=1}^{\infty} c_{\nu+\varkappa} A_{\varkappa 1}^{(\nu)} \qquad \text{(nach (8))}$$

$$= x_\nu - c_\nu \qquad \text{(nach (27))}.$$

ormal ist die Gleichung (26) also in der Tat erfüllt, und um die formale echnung zu rechtfertigen, muß nur noch die Konvergenz der Doppelreihe

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} |a_{\nu\mu} c_{\mu+\nu+\varkappa} A_{\varkappa 1}^{(\mu+\nu)}|$$

zeigt werden.

Wenn die $a_{\nu\mu}$ den Bedingungen von Satz 1 genügen, und wenn die beschränkt sind, etwa $|c_\nu| \leqq K$, ist die Konvergenz von (28) evident, ja nach § 2 auch $|A_{\varkappa 1}^{(\mu+\nu)}| \leqq C$ ist. Wir wollen noch zeigen, daß die ösung x_ν beschränkt ist. In der Tat ist nach den Entwicklungen des 2 für $\nu \geqq 1$

$$|A_{\nu 1}^{(\lambda)}| \leqq M_{\nu+\lambda-1} \gamma_{\nu+\lambda} \leqq C \gamma_{\nu+\lambda}.$$

lso

$$|x_\nu| = |\sum_{\varkappa=0}^{\infty} c_{\nu+\varkappa} A_{\varkappa 1}^{(\nu)}| \leqq |c_\nu| + \sum_{\varkappa=1}^{\infty} |c_{\nu+\varkappa}| C \gamma_{\varkappa+\nu} \leqq K + KC \sum_{\lambda=1}^{\infty} \gamma_\lambda.$$

Somit ist bewiesen

Satz 3. *Wenn in der Summengleichung*

$$x_\nu = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\nu\mu} x_{\mu+\nu} + c_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

die c_ν beschränkt sind, und die Doppelreihe $\sum |a_{\nu\mu}|$ konvergiert, so stellt die Reihe

$$x_\nu = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} c_{\nu+\varkappa} A_{\varkappa 1}^{(\nu)}$$

eine Lösung dar, die zudem beschränkt ist.

Satz 1 lehrt dann, daß das die einzige beschränkte Lösung ist.

Unter den Voraussetzungen von Satz 2 wird die Konvergenz der Doppelreihe (28) gezeigt sein, wenn die Reihen

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} |b_{\nu\mu} c_{\mu+\nu+\varkappa} A_{\varkappa 1}^{(\mu+\nu)}|, \qquad \sum_{\varkappa=0}^{\infty} |c_{k+\nu+\varkappa} A_{\varkappa 1}^{(k+\nu)}|$$

als konvergent erkannt sind. Diese Konvergenz ist aber wegen $|A_{\varkappa 1}^{(\mu+\nu)}| \leqq C$ offenbar, sobald die Reihe $\sum |c_\nu|$ konvergiert. Außerdem ist dann nach (27)

$$|x_\nu| \leqq C \sum_{\varkappa=0}^{\infty} |c_{\nu+\varkappa}|.$$

Daher sind die x_ν beschränkt, und es ist sogar

$$\lim_{\nu=\infty} x_\nu = 0.$$

Also folgt

Satz 4. *Wenn in der Summengleichung*

$$x_\nu = x_{\nu+k} + \sum_{\mu=1}^{\infty} b_{\nu\mu} x_{\mu+\nu} + c_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

die Koeffizienten $b_{\nu\mu}$, c_ν so beschaffen sind, daß die Reihe $\sum |c_\nu|$ und die Doppelreihe $\sum |b_{\nu\mu}|$ konvergieren, so stellt die Reihe

$$x_\nu = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} c_{\nu+\varkappa} A_{\varkappa 1}^{(\nu)}$$

eine beschränkte Lösung dar, für welche zudem $\lim_{\nu=\infty} x_\nu = 0$ ist.

Satz 2 lehrt dann sogleich die allgemeinste beschränkte Lösung kennen, und zwar hat keine mehr die Eigenschaft, daß $\lim_{\nu=\infty} x_\nu = 0$ ist.

(Eingegangen am 11. Februar 1920.)

ber den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Momentenproblem.

Von

Georg Pólya in Zürich.

Das Auftreten der Gaußschen Wahrscheinlichkeitsdichte e^{-x^2} bei iederholten Versuchen, bei Messungsfehlern, die aus der Zusammensetzung on sehr vielen und sehr kleinen Elementarfehlern resultieren, bei Diffuonsvorgängen usw. ist bekanntlich aus einem und demselben Grenzwertsatz zu erklären, der in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine zentrale olle spielt. Der eigentliche Entdecker dieses Grenzwertsatzes ist Laplace nennen, seine strenge Begründung hat zuerst wohl Tschebyscheff nternommen und seine schärfste Formulierung findet sich, soweit mir kannt, in einer Arbeit von Liapounoff[1]). Für den genauen Wortlaut ll etwa auf die letztgenannte Stelle oder auf andere Arbeiten über den egenstand[2]) oder auf die Lehrbücher der Wahrscheinlichkeitsrechnung[3]) rwiesen werden.

Ich befasse mich hier bloß mit einer mathematischen Methode, die m Beweise dieses Grenzwertsatzes herangezogen werden kann, oder nauer gesagt, mit einigen rein analytischen Sätzen über Folgen monotoner nktionen, auf die der Beweis aufgebaut werden kann. Dem Kenner s Gegenstandes wird es nicht entgehen, an welchem Punkte des üblichen weisganges meine Sätze zu benutzen sind. Man hat z. B. damit an e Formel (13) auf S. 27 der v. Misesschen Abhandlung[2]) anzuknüpfen.

[1]) Liapounoff, Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité. moires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg, VIIIe série, vol. XII, . 5.

[2]) Vgl. z. B. R. v. Mises Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, th. Zeitschr., 4 (1919), S. 1—97, Sätze III, III_2. Die Sätze I, II, IV und V dieser handlung berühren sich mit dem hier gemeinten Grenzwertsatze, aber sind darin ht enthalten.

[3]) Vgl. z. B. Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung, übersetzt von H. Liebmann eipzig 1912), S. 67—81, 259—271.

Der Beweis wird nachher durch eine ähnliche Formel [vgl. Formel (17 dieser Abhandlung] erbracht, wie die Formel (25) auf S. 34 der v. Mises schen Abhandlung.

Ich erwähne nur, daß auch die schärfste mir bekannte Fassung de wahrscheinlichkeitstheoretischen Grenzwertsatzes, nämlich die von Liapou noff, meinen Hilfsmitteln erreichbar ist. Die ausführliche Darstellun spare ich mir für ein Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf, da ich seit langem vorbereite[4]).

Die Benutzung diskontinuierlicher Faktoren in diesen Fragen geh bis auf Laplace zurück. Liapounoff erreichte sein Ziel durch ein geistreiche Modifikation der herkömmlichen Gestalt des diskontinuierliche Faktors von Dirichlet. Meine Untersuchung im § 1 stützt sich eben falls auf eine Art von diskontinuierlichem Faktor, nämlich auf ein übe das komplexe Gebiet erstrecktes Integral, das in der analytischen Zahlen theorie ständig verwendet wird [vgl. (18)]. Mein Weg zum Beweise de Laplace-Tschebyscheffschen Grenzwertsatzes ist ähnlich beschaffen nur viel weniger verschlungen als der Weg, auf dem man zum Beweis des Primzahlsatzes gelangt.

Der springende Punkt in dem Tschebyscheff-Markoffschen Be weisgange bildet der Nachweis einer Eigenschaft der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-x^2} dx .$$

Die Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ... seien monoton; wen die Momente von $f_n(x)$ gegen die von $f(x)$ streben, so strebt $f_n(x$ gegen $f(x)$. Ich zeige im § 2, daß diese Eigenschaft jeder monotone und stetigen Funktion $f(x)$ zukommt, die von 0 bis 1 wächst, währen x von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft, wenn nur die Momente von $f(x)$ gewisse einfachen Ungleichungen genügen. Diesen Satz möchte ich als den „Stetig keitssatz des Momentenproblems" bezeichnen. Der Stetigkeitssatz de Momentenproblems wird sich in § 2 als eine leicht übersichtliche Folge rung des Schlußsatzes des § 1 ergeben.

§ 1.

Sätze über Folgen monotoner Funktionen.

Die Sätze, die ich im folgenden ableite, lassen sich auch für ei endliches Intervall aussprechen und auch auf solche Funktionen mehrer

[4]) Eine Probe meiner Untersuchungen habe ich in der Arbeit „Über d Gaußsche Fehlergesetz", Astronomische Nachrichten, **208** (1919), Nr. 4981 ve öffentlicht.

riablen übertragen, die in jeder Variablen monoton sind. Mit Rück-
ıt auf die Anwendung, die mir vorschwebt, ziehe ich es vor, nur
e spezielle Art von monotonen Funktionen einer Veränderlichen zu
ersuchen.

Ich betrachte solche Funktionen $f(x)$, die für alle reellen Werte
ı x definiert sind, nie abnehmen, von rechts stetig sind (von links
ınen sie jedoch unstetig sein) und überdies die Eigenschaft haben, daß

$$\lim_{x=-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x=+\infty} f(x) = 1.$$

ıe solche Funktion will ich, im Anschluß an Herrn v. Mises, kurz als
e Verteilungsfunktion bezeichnen.

Satz I. *Wenn eine Folge von Verteilungsfunktionen gegen eine*
tige Verteilungsfunktion konvergiert, so konvergiert sie gleichmäßig.

Gemeint ist natürlich Konvergenz in jedem Punkt. (Wie aus dem
weis hervorgeht, würde es genügen, weniger, nämlich bloß Konvergenz
einer überall dichten Punktmenge, vorauszusetzen.)

Die fragliche Folge soll

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

ißen, und die Grenzfunktion $f(x)$. Da letztere der Bedingung (1)
nügt, ist es möglich, bei beliebig vorgegebenem positiven ε eine ganze
hl l zu finden, derart, daß

$$f(-l) < \tfrac{\varepsilon}{2}, \qquad f(+l) > 1 - \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

die Grenzfunktion $f(x)$ stetig und folglich gleichmäßig stetig ist,
istiert eine ganze positive Zahl m, so daß die Ungleichungen

$$f\left(\tfrac{\mu}{m}\right) - f\left(\tfrac{\mu-1}{m}\right) < \tfrac{\varepsilon}{2}$$
$$(\mu = -lm+1, -lm+2, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, lm)$$

üllt sind. Da die Folge (2) gegen $f(x)$ konvergiert, sind für alle n
n einem gewissen an auch die $2lm+1$ Ungleichungen

$$\left| f_n\left(\tfrac{\mu}{m}\right) - f\left(\tfrac{\mu}{m}\right) \right| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$
$$(\mu = -lm, -lm+1, \ldots, 0, \ldots, lm-1, lm)$$

üllt.

Ich betrachte nacheinander die drei Intervalle von $-\infty$ bis $-l$,
n $-l$ bis $+l$, von $+l$ bis $+\infty$, jedes für sich. Wenn

$$x \leqq -l,$$

so ist

$$0 - f(-l) \leqq f_n(x) - f(x) \leqq f_n(-l) - 0, \tag{7}$$

da die betrachteten Funktionen monoton sind und den Bedingungen (1 genügen. Nun ist nach (3) und nach (5) ($\mu = -lm$ gesetzt)

$$f_n(-l) \leqq |f_n(-l) - f(-l)| + f(-l) \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Durch Berücksichtigung dieser Ungleichung und der Ungleichung (3) ergib sich aus (7) im Intervalle (6)

$$-\frac{\varepsilon}{2} \leqq f_n(x) - f(x) \leqq \varepsilon.$$

Ähnlich läßt sich der Fall $x \geqq +l$ behandeln. Liegt aber x zwische $-l$ und $+l$, so ist

$$\frac{\mu - 1}{m} \leqq x \leqq \frac{\mu}{m}$$

für ein passendes μ der Reihe $\mu = -lm + 1, \ldots 0, \ldots + lm$. Somit i nach (4) und (5), und weil die betrachteten Funktionen monoton wachse

$$f_n(x) - f(x) \leqq \left(f_n\left(\frac{\mu}{m}\right) - f\left(\frac{\mu}{m}\right)\right) + \left(f\left(\frac{\mu}{m}\right) - f\left(\frac{\mu-1}{m}\right)\right) \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$f_n(x) - f(x) \geqq \left(f_n\left(\frac{\mu-1}{m}\right) - f\left(\frac{\mu-1}{m}\right)\right) - \left(f\left(\frac{\mu}{m}\right) - f\left(\frac{\mu-1}{m}\right)\right) \geqq -\frac{\varepsilon}{2} -$$

D. h. es ist für alle Werte von x

$$-\varepsilon \leqq f_n(x) - f(x) \leqq \varepsilon$$

für alle n von einem passenden an, w. z. b. w.

Satz II. *Es sei die Derivierte von rechts der stetigen Funktion* $F_n($ *eine Verteilungsfunktion* ($n = 1, 2, 3, \ldots$). *Wenn die Folge*

$$F_1(x),\ F_2(x),\ \ldots,\ F_n(x),\ \ldots \tag{8}$$

gegen eine derivable Funktion $F(x)$ *konvergiert, deren Derivierte ei Verteilungsfunktion ist, so konvergiert auch die Folge der rechten D rivierten der Funktionen* $F_n(x)$, *und zwar gleichmäßig gegen* $F'(x)$.

Ich bezeichne die *rechte* Derivierte von $F_n(x)$ mit $f_n(x)$, die D rivierte von $F(x)$ mit $f(x)$. Die Funktionen $f_n(x)$ können eventue an unendlich vielen Stellen Unstetigkeit durch Sprung erleiden. Ei andere Art von Unstetigkeit ist bei monotonen Funktionen ausgeschlosse Die Funktion $f(x)$ ist jedoch eine Derivierte, nimmt als solche al Zwischenwerte an, kann folglich keine Sprungstellen haben und ist son *stetig*. Gestützt auf Satz I genügt es also, bloß die Konvergenz d Folge $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ zu beweisen, die gleichmäßige Ko vergenz folgt daraus von selbst.

Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zu einer gegebenen Zahl x lassen sich ei andere x_1 und x_2 so bestimmen, daß

$$x_1 < x < x_2$$

$$\left|\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \left|\frac{F(x_2)-F(x)}{x_2-x} - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da $f_n(x)$ eine Verteilungsfunktion und die rechte Derivierte von $F_n(x)$ folgt für alle n

$$F_n(x) - F_n(x_1) = \int_{x_1}^{x} f_n(x)\,dx \leqq (x - x_1) f_n(x),$$

$$F_n(x_2) - F_n(x) = \int_{x}^{x_2} f_n(x)\,dx \geqq (x_2 - x) f_n(x),$$

er anders geschrieben

$$\frac{F_n(x)-F_n(x_1)}{x-x_1} \leqq f_n(x) \leqq \frac{F_n(x_2)-F_n(x)}{x_2-x}.$$

Daraus folgt, da die Folge (8) gegen $F(x)$ konvergiert, daß für alle n n einem gewissen an

$$\text{9)} \qquad \frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} - \frac{\varepsilon}{2} \leqq f_n(x) \leqq \frac{F(x_2)-F(x)}{x_2-x} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Kombiniert man (9) und (10), so ergibt sich für alle fraglichen n

$$|f_n(x) - f(x)| \leqq \varepsilon, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Satz III. *Ich betrachte die Folge von uneigentlichen Stieltjesschen tegralen*

$$\text{1)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ut}\,df_1(t), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ut}\,df_2(t), \quad \ldots, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ut}\,df_n(t), \quad \ldots,$$

$f_1(t)$, $f_2(t)$, …, $f_n(t)$, … *Verteilungsfunktionen bedeuten und eine sitive Größe a existiert, derart, daß jedes Integral für $-a \leqq u \leqq +a$ nvergiert. Es sei vorausgesetzt, daß für dieselben Werte von u*

$$\text{2)} \qquad \lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ut}\,df_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ut}\,df(t),$$

$f(t)$ *eine* stetige *Verteilungsfunktion bedeutet.*

Dann ist, gleichmäßig für alle Werte von x,

$$\text{3)} \qquad \lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x).$$

Um diese Behauptung zu beweisen, setze ich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ut}\,df(t) = \Phi(u), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ut}\,df_n(t) = \Phi_n(u)$$

und betrachte die Funktionen $\Phi(u)$, $\Phi_n(u)$ für komplexe Werte d Variablen u, insbesondere für solche, die im unendlichen vertikalen Streif

$$-a \leqq \Re(u) \leqq +a \tag{14}$$

von der Dicke $2a$ liegen. Es ist für $b > 0$, wenn (14) erfüllt ist,

$$|\int_0^b e^{ut} df_n(t)| \leqq \int_0^\infty e^{at} df_n(t), \qquad |\int_{-b}^0 e^{ut} df_n(t)| \leqq \int_{-\infty}^0 e^{-at} df_n(t). \tag{15}$$

Daraus folgt, daß die Integrale (11) im ganzen Streifen (14) existier und daß in dessen Innerem die Funktionen $\Phi_n(u)$ sämtlich analytis sind. Es folgt übrigens aus (15), indem man b unendlich werden lä daß in demselben Streifen (14)

$$|\Phi_n(u)| \leqq \Phi_n(a) + \Phi_n(-a). \tag{16}$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung hat, nach Voraussetzung (12), $n = \infty$ einen Grenzwert. Sie hat also a fortiori eine von n unabhäng endliche obere Schranke, und folglich bleibt die Funktionenfo $\Phi_1(u)$, $\Phi_2(u)$, ..., $\Phi_n(u)$, ... in dem Streifen (14) gleichmäßig schränkt. Die Konvergenz der Folge (11) pflanzt sich somit, kraft grundlegenden Vitalischen Satzes, von der reellen Achse auf den ganz Streifen (14) fort und findet gleichmäßig in jedem endlichen Teil von statt.

Es sei die Zahl α, $0 < \alpha < a$ fest gewählt. Es folgt aus dem schlossenen Verhalten der Folge $\Phi_1(u)$, $\Phi_2(u)$, ..., $\Phi_n(u)$, ..., daß

$$\lim_{n=\infty} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Phi_n(u) \frac{e^{-xu}}{u^2}\, du = \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Phi(u) \frac{e^{-xu}}{u^2}\, du, \tag{17}$$

für beliebige reelle Werte von x, die Integrale entlang einer zur ima nären Achse parallelen Gerade erstreckt. In der Tat: die Integrale lin haben, nach (16), eine gemeinsame Majorante.

Es ist, wie bekannt,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{uz}}{u^2}\, du = \begin{cases} z & \text{für } z \geqq 0, \\ 0 & \text{für } z \leqq 0. \end{cases} \tag{18}$$

Da man bei absoluter Konvergenz die Integrationsfolge vertausch darf, ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Phi_n(u) \frac{e^{-xu}}{u^2}\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} df_n(t) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{u(t-x)}}{u^2}\, du \right) = \int_x^\infty (t-x)\, df_n(t$$

Eine ähnliche Formel gilt für $\Phi(u)$. Setzt man also

$$F_n(x) = x + \int_x^\infty (t-x)\, df_n(t), \qquad F(x) = x + \int_x^\infty (t-x)\, df(t),$$

) kann man (17) auch so schreiben:

19) $$\lim_{n=\infty} F_n(x) = F(x).$$

ie rechte Derivierte von $F_n(x)$ ist $f_n(x)$, die Derivierte von $F(x)$ ist (x), wie man leicht nachrechnet. Somit wird der Satz II auf die eben efinierte Folge $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x), \ldots$ anwendbar, und der Satz III t bewiesen.

In den Anwendungen auf Wahrscheinlichkeitsrechnung ist

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-x^2}\, dx,$$

nd die Gleichung (12) läßt sich gewöhnlich verhältnismäßig einfach er- alten, wie z. B. bei dem Markoffschen Problem der verketteten Größen. ie Stellung meines Beweisganges zu den eingangs erwähnten läßt sich) charakterisieren: Tschebyscheff und Markoff betrachten hauptsächlich ie Derivierten von $\Phi_n(u)$ für $u = 0$, Liapounoff betrachtet $\Phi_n(u)$ für ein imaginäre Werte von u, ich betrachte $\Phi_n(u)$ als analytische Funk- ion von u im Streifen (14). Einer Verallgemeinerung auf mehrere ariablen, die zur Behandlung mehrdimensionaler Wahrscheinlichkeits- robleme dienen kann, steht keine Schwierigkeit im Wege.

§ 2.

Der Stetigkeitssatz des Momentenproblems.

Ich beweise den folgenden allgemeinen Satz:

Die Verteilungsfunktion $f(x)$ sei stetig. Die Momente von $f(x)$

20) $$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m\, df(x) = t_m \qquad (m = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

ollen der Bedingung genügen, daß

21) $$\overline{\lim_{m=\infty}} \frac{\sqrt[2m]{t_{2m}}}{m}$$

ndlich ist. Genügt dann die Folge von Verteilungsfunktionen

22) $$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

en unendlich vielen Grenzbedingungen

23) $$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^\mu\, df_n(x) = t_\mu \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

so ist

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x)$$

gleichmäßig in jedem Intervalle.

Kurz gefaßt, besagt dieser Satz, daß wenn die Momente der Funktionenfolge (22) gegen die von $f(x)$ konvergieren, so konvergiert die Folge gegen $f(x)$. Tschebyscheff und Markoff haben diesen Satz bloß für den Fall

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-x^2} dx$$

bewiesen[5]). Heute, wo neuere Untersuchungen das Stieltjessche Momentenproblem in verschiedenen Richtungen vertieft und klargelegt haben, ist der Satz verhältnismäßig leicht abzuleiten. Er ist ein einfaches Korollar einer kürzlich publizierten Bemerkung des Herrn H. Hamburger[6]), die sich ihrerseits auf die wichtigen Untersuchungen des Herrn Grommer[7]) stützt.

Es sei mir gestattet, für diesen Satz, dem so viele berühmte Bemühungen gegolten haben, hier einen kurzen, direkten Beweis zu führen, der sich neben einigen rein algebraischen Sätzen, die jedem Kenner des Momentenproblems völlig geläufig sind, sich bloß auf meinen eben bewiesenen Hilfssatz III stützt.

Ich will zuerst die nötigen algebraischen Sätze in passender Fassung zusammenstellen, die bis auf einen, den man Herrn Grommer verdankt, sich schon in den ersten Arbeiten von Tschebyscheff und Stieltjes finden[8]).

1. Eine Verteilungsfunktion, die nur endlich viele Sprungstellen hat und zwischen zwei konsekutiven Sprungstellen konstant ist, bezeichne ich als eine *Treppenfunktion. Ist $f(x)$ eine Verteilungsfunktion, jedoch keine Treppenfunktion, so gehört zu $f(x)$ eine nie abbrechende Folge von annähernden Treppenfunktionen $T_1(x), T_2(x), \ldots, T_n(x), \ldots$.*

Hierbei ist $T_n(x)$ eindeutig bestimmt durch die Forderung, daß sie genau n Sprungstellen haben und den $2n$ Gleichungen

---

[5]) Ein außerordentlich eleganter Beweis befindet sich bei A. Markoff, Démonstration du second théorème-limite du calcul des probabilités par la méthode des moments. (Supplément à la 3-ième édition russe du „Calcul des probabilités". (St. Pétersbourg, 1913.) Vgl. auch v. Mises a. a. O. S. 51.

[6]) H. Hamburger, Beiträge zur Konvergenztheorie der Stieltjesschen Kettenbrüche, Math. Zeitschrift, 4 (1919), S. 186–222. Vgl. S. 212–222.

[7]) J. Grommer, Ganze transzendente Funktionen mit lauter reellen Nullstellen, Crelles Journal f. Mathematik, **144** (1913), S. 114–166.

[8]) Stieltjes, Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques, Annales de l'Ecole Normale, 3. Folge, 1 (1884), S. 409–426.

4) $$\int_{-\infty}^{+\infty} x^\nu d T_n(x) = t_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots, 2n-1)$$

nügen soll.

2. *Befindet sich x zwischen zwei benachbarten Sprungstellen von $_n(x)$, so kann die Differenz $f(x) - T_n(x)$ den größeren der beiden zu esen Stellen gehörigen Sprünge dem absoluten Werte nach nicht ertreffen.*

Die beschriebene Ungleichung bringt nur einen Teil der Tatsache m Ausdruck: die die Funktion $f(x)$ darstellende monotone Kurve muß e vertikalen Strecken der Treppe passieren, die $T_n(x)$ darstellt.

3. Während die $2n$ ersten Momente von $f(x)$ mit denjenigen von $_n(x)$ gemäß (24) übereinstimmen, besteht für die höheren Momente von radem Index die Ungleichung

5) $$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2\nu} d T_n(x) < t_{2\nu} \qquad (\nu = n, n+1, n+2, \ldots),$$

e von Herrn Grommer herrührt[9]).

Ich betrachte nun das Stieltjessche Integral

6) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ux} d T_n(x) = t_0 + \frac{t_1}{1!} u + \ldots + \frac{t_{2n-1}}{2n-1!} u^{2n-1} + \sum_{\nu=2n}^{\infty} \frac{u^\nu}{\nu!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^\nu d T_n(x),$$

s eigentlich bloß die Summe von n Exponentialgrößen und als solche ne ganze Funktion der Variablen u ist. Die Voraussetzung (21) könnte ch so gefaßt werden, daß

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[2n]{\frac{t_{2n}}{2n!}} = \frac{e}{2} \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\sqrt[2n]{t_{2n}}}{n}$$

dlich ist, oder auch so, daß die Potenzreihe

7) $$t_0 + \frac{\sqrt{t_0 t_2}}{1!} u + \frac{t_2}{2!} u^2 + \frac{\sqrt{t_2 t_4}}{3!} u^3 + \frac{t_4}{4!} u^4 + \ldots$$

en von 0 verschiedenen Konvergenzradius hat. Die Potenzreihe (27) jedoch eine gemeinsame Majorante aller Reihen, die man erhält, wenn n rechts in (26) $n = 1, 2, 3, \ldots$ setzt. Auf die Glieder mit geradem dex ist die Ungleichung (25) ohne weiteres anwendbar, für die Glieder t ungeradem Index besteht die Ungleichung

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2\nu+1} d T_n(x)\right)^2 \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2\nu} d T_n(x) \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2\nu+2} d T_n(x).$$

[9]) Vgl. l. c. [7]) S. 132, Formel (16).

Da wir mit einer Folge von Potenzreihen mit gemeinsamer Majorante z tun haben, folgt aus (26) im Innern des Konvergenzkreises der Reihe (27

$$(28) \qquad \lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ux} dT_n(x) = t_0 + \frac{t_1}{1!} u + \frac{t_2}{2!} u^2 + \ldots = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ux} df(x).$$

Die Verwandlung der Reihe in das Integral ist gestattet, da auch d Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{u|x|} df(x)$$

von der Reihe (27) majorisiert wird[10]).

Mit (28) ist jedoch die Bedingung (12) des Hilfssatzes III erfüll durch dessen Anwendung sich

$$(29) \qquad \lim_{n=\infty} T_n(x) = f(x)$$

ergibt, und zwar gleichmäßig für alle x, da doch $f(x)$ als stetig vorausgeset wurde. Die Limesgleichung (29) ist gemäß (24) nur ein Spezialfall d zu beweisenden Satzes, aber in diesem Spezialfall ist der Kernpunkt d Sache enthalten[11]).

Ordnen wir jetzt nämlich der Verteilungsfunktion $f_n(x)$, die das a gemeine Glied der Folge (22) bildet, die annähernden Treppenfunktion

$$T_1^{(n)}(x),\ T_2^{(n)}(x),\ \ldots\ T_m^{(n)}(x),\ \ldots$$

zu und zerlegen wir die Differenz

$$(30) \qquad f(x) - f_n(x) = (f(x) - T_m(x)) + (T_m(x) - T_m^{(n)}(x)) + (T_m^{(n)}(x) - f_n(x)),$$

deren drei Teile wir nacheinander betrachten wollen.

Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da die Limesgleichung (29) gleichmäß für alle x stattfindet, und die Funktion $f(x)$ gleichmäßig stetig ist, es zunächst möglich ein m zu bestimmen, so daß für dieses m

---

[10]) Vgl. bei Hamburger, l. c. [6]) S. 195, Hilfssatz 2. Übrigens wäre in unser Fall auch der Weierstraßsche Doppelreihensatz anwendbar.

[11]) Die Beziehung (29) kann auch so ausgedrückt werden, daß der zu der Re $\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n df(x)$ assoziierte Kettenbruch, dessen n-ter Näherungsbruch el $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dT_n(x)}{z+x}$ ist, konvergiert. Vgl. Hamburger a. a. O. Übrigens ist das Hau lemma des Herrn Hamburger a. a. O. S. 196—198 in unwesentlich verschiede Form schon in meiner unter [4]) zitierten Arbeit zu finden.

31) $$|f(x) - T_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ird, und daß alle Sprünge der Funktion $T_m(x)$ ebenfalls kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$ nd.

Die m Sprungstellen und die m dazugehörigen Sprünge der Funktion $_m(x)$ sind algebraische Funktionen der $2m$ Zahlen $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{2m-1}$ benso, wie die m Sprungstellen und Sprünge von $T_m^{(n)}(x)$ von den ersten m Momenten von $f_n(x)$ es sind (vgl. unter 1). Des genaueren soll man ch daran erinnern, daß die m Sprungstellen von $T_m(x)$ die verschiedenen nd folglich einfachen) Nullstellen einer Gleichung m-ten Grades sind, eren Koeffizienten rational von $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{2m-1}$ abhängen, und daß der Sprung sich rational durch die betreffende Sprungstelle und durch $, t_1, \ldots, t_{2m-1}$ ausdrückt. Beschränken wir uns auf die ersten $2m$ imesgleichungen unter (23), indem wir $\mu = 0,1, 2, 3, \ldots, 2m-1$ setzen. eachten wir, daß algebraische Funktionen stetig sind und daß unter den eschriebenen Bedingungen eine Verwechselung der m verschiedenen weige unmöglich (und auch irrelevant) ist. So sehen wir, daß es eine anze Zahl N existiert, so daß für $n > N$ einerseits

32) $$|T_m(x) - T_m^{(n)}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

nd andererseits die Sprünge von $T_m^{(n)}(x)$, ebenso wie diejenigen von $_m(x)$, kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$ ausfallen.

Aus der letzterwähnten Tatsache folgt, gemäß dem unter 2 zitierten atze, daß

33) $$|T_m^{(n)}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Die Gleichung (30) und die Ungleichungen (31), (32), (33) ergeben usammengefaßt

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

ür alle fragliche n und gleichmäßig für alle x, w. z. b. w.

Es liegt auf der Hand, daß die hervorgehobene Gleichmäßigkeit der Konvergenz ohne die vorausgesetzte Stetigkeit von $f(x)$ für beliebige Folgen (22) nicht stattfinden könnte. Läßt man die Bedingung der tetigkeit von $f(x)$ fallen, so gibt der dargestellte Beweisgang noch immer estimmte Resultate, auf deren Formulierung ich kein Gewicht lege.

(Eingegangen am 4. September 1919.)

Über die Differentialinvarianten algebraischer Flächen.

Von

Heinrich W. E. Jung in Halle a. d. Saale.

Einleitung.

Wählen wir in einem algebraischen Körper K zweier unabhängigen Veränderlichen aus einer Klasse, deren Dimension größer oder gleich vier ist, vier linear unabhängige ganze Divisoren $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4$ aus und setzen die homogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 eines Punktes diesen Divisoren proportional, so werden die Verhältnisse der x_α Funktionen des Körpers K und alle Punkte (x) liegen auf einer algebraischen Fläche F. Auf diese Art können wir jede algebraische Fläche definieren. Es werden auch die Ebenenkoordinaten x_1', x_2', x_3', x_4' einer Berührungsebene von F proportional zu ganzen Divisoren $\mathfrak{A}_1', \mathfrak{A}_2', \mathfrak{A}_3', \mathfrak{A}_4'$ einer Klasse des Körpers K. Man kann die Stellen des Körpers immer so definieren, daß weder die $\mathfrak{A}_\alpha$ noch die $\mathfrak{A}_\alpha'$ an einer Stelle alle gleichzeitig verschwinden. Es entspricht dann jeder Stelle des Körpers eine bestimmte Stelle von F mit einer bestimmten Berührungsebene. Darauf gehe ich hier nicht weiter ein. Jede Stelle von K und daher auch von F ist dadurch mit ihrer Umgebung definiert, daß dort alle Funktionen aus K als gewöhnliche Potenzreihen zweier Hilfsgrößen u, v dargestellt werden können oder als Quotienten solcher. Es werden also in der Umgebung jeder Stelle die $\mathfrak{A}_\alpha$ und $\mathfrak{A}_\alpha'$ gewöhnliche Potenzreihen zweier Größen u, v. Wir können daher eine Differentialgeometrie unter Verwendung homogener Koordinaten entwickeln. Von besonderer Bedeutung sind diejenigen Differentialinvarianten, die invariant sind, sowohl gegenüber der Einführung neuer Veränderlicher an Stelle von u, v als auch gegenüber Koordinatentransformationen. Ist $\mathfrak{J}(u, v)$ eine solche Invariante, so wird, wenn $\mathfrak{J}(u, v)$ an der Stelle $u = v = 0$ null wird, durch $\mathfrak{J}(u, v) = 0$ eine durch diese Stelle gehende Kurve $\mathfrak{J}$ definiert. Setzen wir $\mathfrak{J}(u, v)$ analytisch fort und kommen so zu einer andern Stelle, wo die Hilfsgrößen u', v' sind, so ist $\mathfrak{J}(u, v)$ wegen der Invarianteneigen-

haft übergegangen in dieselbe Funktion der $\mathfrak{A}_\alpha$ wie $\mathfrak{F}(u, v)$, nur daß att u, v die Veränderlichen u', v' benutzt sind. Daher kommt es, daß de solche Invariante längs einer algebraischen Kurve auf F null wird. as findet seinen Ausdruck in dem Satz:

Ist $\mathfrak{F}$ eine Kurve auf F, längs der eine Invariante null wird, so ist zusammen mit passenden Potenzen der Rückkehrkurve und der mehrchen Kurve der vollständige Schnitt einer algebraischen Fläche mit F. ierzu besteht dann auch der dual entsprechende Satz.

Dem Inhalte nach ist dieser Satz nicht neu. Ich habe ihn aber irgends in dieser Form ausgesprochen gefunden.

Die folgende Arbeit, die im wesentlichen eine Differentialgeometrie ür algebraische Flächen ist, gibt die Grundlage für eine arithmetische heorie der algebraischen Flächen. Diese Theorie habe ich in einem Buch usführlich dargestellt, das im Manuskript vorliegt, aber aus äußeren Grünen zurzeit nicht erscheinen kann. Ich verweise noch auf meine Arbeit im ournal für Mathematik[1]).

I. Die Fläche F.

1. Die Gleichung von F.

Es seien

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4$$

ier linear unabhängige ganze Divisoren derselben Klasse eines algebraischen örpers zweier unabhängigen Veränderlichen. Setzen wir, unter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ gendwelche Konstante verstehend,

1) $$\mathfrak{A}_0 = \lambda_1 \mathfrak{A}_1 + \lambda_2 \mathfrak{A}_2 + \lambda_3 \mathfrak{A}_3 + \lambda_4 \mathfrak{A}_4,$$

2) $$x_\alpha = \frac{\mathfrak{A}_\alpha}{\mathfrak{A}_0} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4),$$

besteht zwischen den x_α eine homogene algebraische Gleichung

3) $$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

e vom n-ten Grade sei. Deuten wir die x_α als homogene Punktkoordiaten, so stellt $F = 0$ die Gleichung einer Fläche F der Ordnung n dar. erstehen wir unter $\mathfrak{A}_\alpha$ eine passend gewählte zugeordnete Funktion für e gerade betrachtete Stelle von F, so können wir (3) auch in der Form hreiben

4) $$F(\mathfrak{A}) \equiv F(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4) = 0;$$

ese Gleichung ist in den Hilfsgrößen u, v identisch.

---

[1]) Jung, Über algebraische Flächen, Journ. f. Math. **150** (1919), S. 47–73.

2. Berührungsebenen. Die Rückkehrkurve.

Wir setzen

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_3 & \mathfrak{A}_4 \\ \frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{A}_4}{\partial u} \\ \frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{A}_4}{\partial v} \end{vmatrix} \equiv \sum_\alpha y_\alpha \mathfrak{Z}_\alpha .$$

Die hierdurch definierten $\mathfrak{Z}_\alpha$ können einen gemeinsamen Teiler haben. Diesen bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}$ und setzen

$$(6)\qquad \mathfrak{Z}_\alpha = \mathfrak{R}\,\mathfrak{A}'_\alpha .$$

Geben wir u, v feste Werte und betrachten die y_α als homogene Punktkoordinaten, so ist

$$(7)\qquad y_1\mathfrak{A}'_1 + y_2\mathfrak{A}'_2 + y_3\mathfrak{A}'_3 + y_4\mathfrak{A}'_4 = 0$$

die Gleichung der Berührungsebene von F im Punkte (u, v). Betrachten wir dagegen die y_α als konstant und u, v als veränderlich, so ist (7) die Gleichung der Kurve, in der der vom Punkte (y) an F gelegte Berührungskegel F berührt. Wir nennen diese Kurve *Berührungskurve* von F und zwar die des Punktes (y).

Die Kurve $\mathfrak{R}$ ist die *Rückkehrkurve* von F.

3. Die mehrfache Kurve.

Aus (4) folgt durch Differentiation nach u, v und nach dem Eulerschen Satze über homogene Funktionen

$$(8)\qquad \sum \mathfrak{A}_k F_k(\mathfrak{A}) \equiv nF(\mathfrak{A}) \equiv 0, \quad \sum \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial u} F_k(\mathfrak{A}) = 0, \quad \sum \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial v} F_k(\mathfrak{A}) = 0$$

Aus diesen Gleichungen folgt, daß $F_k(\mathfrak{A})$ proportional zu $\mathfrak{Z}_k = \mathfrak{R}\,\mathfrak{A}'_k$ ist, so daß man setzen kann

$$(9)\qquad F_k(\mathfrak{A}) = \mathfrak{Z}_k \mathfrak{D} = \mathfrak{R}\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{A}'_k .$$

Da längs $\mathfrak{D}$ die ersten Ableitungen von $F(\mathfrak{A})$ null werden, so ist $\mathfrak{D}$ die *mehrfache Kurve* von F.

Aus (9) folgt die Äquivalenz

$$(10)\qquad \mathfrak{R}\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{A}' \sim \mathfrak{A}^{n-1},$$

wenn wir unter $\mathfrak{A}'$ irgendeine Berührungskurve und unter $\mathfrak{A}$ irgendeinen ebenen Schnitt verstehen.

II. Die Reziprokalfläche.

1. Die Gleichung von F in Ebenenkoordinaten.

Die vier Kurven $\mathfrak{A}'_\alpha$ gehören derselben Klasse an. Setzen wir, unter $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \lambda'_4$ irgendwelche Konstante verstehend,

$$\mathfrak{A}'_0 = \lambda'_1 \mathfrak{A}'_1 + \lambda'_2 \mathfrak{A}'_2 + \lambda'_3 \mathfrak{A}'_3 + \lambda'_4 \mathfrak{A}'_4,$$

$$x'_\alpha = \frac{\mathfrak{A}'_\alpha}{\mathfrak{A}'_0},$$

besteht zwischen den x'_α eine homogene rationale Gleichung

$$F'(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) = 0,$$

vom Grade n' sei. Es ist die Gleichung von F in Ebenenkoordinaten. ir nehmen an, daß F keine abwickelbare Fläche ist, so daß die x'_α von ei unabhängigen Parametern abhängen. Deuten wir die x'_ν als homogene nktkoordinaten, so ist (3) die Gleichung der *Reziprokalfläche* F' von F. ir können (3) auch in der Form schreiben

$$F'(\mathfrak{A}') \equiv F'(\mathfrak{A}'_1, \mathfrak{A}'_2, \mathfrak{A}'_3, \mathfrak{A}'_4) = 0,$$

wir unter $\mathfrak{A}'_\alpha$ eine passende zugeordnete Funktion von $\mathfrak{A}'_\alpha$ für die rade betrachtete Stelle verstehen.

2. Berührungspunkte. Parabolische Kurve.

Sind y'_α homogene Ebenenkoordinaten, so ist

$$\begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 & y'_3 & y'_4 \\ \mathfrak{A}'_1 & \mathfrak{A}'_2 & \mathfrak{A}'_3 & \mathfrak{A}'_4 \\ \frac{\partial \mathfrak{A}'_1}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{A}'_2}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{A}'_3}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{A}'_4}{\partial u} \\ \frac{\partial \mathfrak{A}'_1}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{A}'_2}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{A}'_3}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{A}'_4}{\partial v} \end{vmatrix} \equiv \sum y'_k \mathfrak{Z}'_k = 0$$

Gleichung des Berührungspunktes der Berührungsebene im Punkte (u, v). trachten wir die y'_α als fest und u, v als veränderlich, so stellt (5) die eichung des ebenen Schnittes der Ebene (y') dar, abgesehen von einem n den y'_α unabhängigen Faktor, den die $\mathfrak{Z}'_k$ haben können. Nennen wir sen $\mathfrak{R}'$, so muß danach sein

$$\mathfrak{Z}'_k = \mathfrak{R}' \mathfrak{A}_k.$$

$\mathfrak{R}'$ ist die *parabolische Kurve* von F.

3. Die Kurve der mehrfachen Berührungsebenen.

Aus (4) folgt

$$(7)\quad \sum \mathfrak{A}'_k F'_k(\mathfrak{A}') = n' F'(\mathfrak{A}') = 0, \quad \sum \frac{\partial \mathfrak{A}'_k}{\partial u} F'_k(\mathfrak{A}') = 0, \quad \sum \frac{\partial \mathfrak{A}'_k}{\partial v} F'_k(\mathfrak{A}')$$

und hieraus, daß man setzen kann

$$(8)\qquad F'_k(\mathfrak{A}') = \mathfrak{R}' \mathfrak{D}' \mathfrak{A}_k .$$

Die hierdurch definierte Kurve $\mathfrak{D}'$ enthält die Primkurven, die aus de Berührungspunkten der mehrfach berührenden Tangentialebenen von bestehen. Wir nennen $\mathfrak{D}'$ die Kurve der *mehrfachen Berührungsebenen*.

Es seien noch folgende Gleichungen angegeben, die öfter gebrauch werden und aus den Gleichungen (8), (9) in I und (7), (8) in II folgen

$$(9)\qquad \begin{gathered} \sum \mathfrak{A}_k \mathfrak{A}'_k = 0, \quad \sum \mathfrak{A}_k \frac{\partial \mathfrak{A}'_k}{\partial u} = 0, \quad \sum \mathfrak{A}_k \frac{\partial \mathfrak{A}'_k}{\partial v} = 0, \\ \sum \mathfrak{A}'_k \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial u} = 0, \quad \sum \mathfrak{A}'_k \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial v} = 0 . \end{gathered}$$

III. Die Fläche F in der Umgebung einer Stelle.

1. Punkte in der Berührungsebene einer Stelle und Ebene durch den Berührungspunkt einer Berührungsebene.

Wir betrachten eine Stelle S und ihre Umgebung. Es sind dort d $\mathfrak{A}_\alpha$ und $\mathfrak{A}'_\alpha$ Funktionen zweier Hilfsgrößen u, v. Wir können setzen

$$x_\alpha = \mathfrak{A}_\alpha , \qquad x'_\alpha = \mathfrak{A}'_\alpha ,$$

da es auf die Faktoren $\mathfrak{A}_0^{-1}$ und $\mathfrak{A}_0'^{-1}$ nicht ankommt. Jedem Wert paar u, v entspricht eine bestimmte Stelle und eine bestimmte Berührung ebene von F. Die Gleichung der Berührungsebene in (u, v) ist

$$1)\qquad y_1 \mathfrak{A}'_1 + y_2 \mathfrak{A}'_2 + y_3 \mathfrak{A}'_3 + y_4 \mathfrak{A}'_4 = 0$$

und die Gleichung des Berührungspunktes der Berührungsebene (u, v) i

$$(2)\qquad y'_1 \mathfrak{A}_1 + y'_2 \mathfrak{A}_2 + y'_3 \mathfrak{A}_3 + y'_4 \mathfrak{A}_4 = 0 .$$

Diese Gleichungen werden identisch erfüllt, wenn wir setzen

$$(3)\qquad y_\alpha = \mathfrak{A}_\alpha + \xi \frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial u} + \eta \frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial v} ,$$

$$(4)\qquad y'_\alpha = \mathfrak{A}'_\alpha + \xi' \frac{\partial \mathfrak{A}'_\alpha}{\partial u} + \eta' \frac{\partial \mathfrak{A}'_\alpha}{\partial v}$$

für beliebige Werte von ξ, η, ξ', η', wie aus den Gleichungen (9) in folgt. Es entspricht also jedem Wertepaar ξ, η ein Punkt der Berührung ebene der Stelle (u, v) und damit eine Tangente von F in (u, v), nämli

durch den Punkt ξ, η gehende. Wir bezeichnen sie mit $(\xi\eta)$. Entsprechend wird durch ξ', η' eine durch die Stelle (u, v) gehende Ebene definiert und als Schnitt dieser Ebene mit der Berührungsebene auch eine Tangente, die wir mit $(\xi'\eta')$ bezeichnen. Sowohl bei ξ, η wie bei ξ', η' kommt es auf einen gemeinsamen Faktor nicht an.

2. Die Fläche F in der Umgebung einer Stelle oder einer Berührungsebene.

Es wird, da $F(\mathfrak{A}) \equiv 0$, $F'(\mathfrak{A}') \equiv 0$,

$$F(y) \equiv T_1(\xi, \eta) + \frac{1}{2} T_2(\xi, \eta) + \ldots,$$

$$F'(y') \equiv T_1'(\xi', \eta') + \frac{1}{2} T_2'(\xi', \eta') + \ldots,$$

wo T_α und T_α' binäre Formen vom Grade α sein sollen.

Es ist

$$T_1(\xi, \eta) \equiv \sum F_k(\mathfrak{A}) \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial u} \xi + \sum F_k(\mathfrak{A}) \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial v} \eta$$

oder wegen I, (8)

$$T_1(\xi, \eta) \equiv 0.$$

Ebenso ist

$$T_1'(\xi', \eta') \equiv 0,$$

so daß

$$F(y) = \frac{1}{2} T_2(\xi, \eta) + \frac{1}{6} T_3(\xi, \eta) + \ldots,$$

$$F'(y') = \frac{1}{2} T_2'(\xi', \eta') + \frac{1}{6} T_3'(\xi', \eta') + \ldots,$$

und zwar ist

$$T_2(\xi, \eta) = \xi^2 \sum F_{kl}(\mathfrak{A}) \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial u} \frac{\partial \mathfrak{A}_l}{\partial u} + 2\xi\eta \sum F_{kl}(\mathfrak{A}) \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial u} \frac{\partial \mathfrak{A}_l}{\partial v} + \eta^2 \sum F_{kl}(\mathfrak{A}) \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial v} \frac{\partial \mathfrak{A}_l}{\partial v},$$

$$T_3(\xi, \eta) = \xi^3 \sum F_{klm}(\mathfrak{A}) \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial u} \frac{\partial \mathfrak{A}_l}{\partial u} \frac{\partial \mathfrak{A}_m}{\partial u} + 3\xi^2\eta \sum F_{klm}(\mathfrak{A}) \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial u} \frac{\partial \mathfrak{A}_l}{\partial u} \frac{\partial \mathfrak{A}_m}{\partial v}$$
$$+ 3\xi\eta^2 \sum F_{klm}(\mathfrak{A}) \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial u} \frac{\partial \mathfrak{A}_l}{\partial v} \frac{\partial \mathfrak{A}_m}{\partial v} + \eta^3 \sum F_{klm}(\mathfrak{A}) \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial v} \frac{\partial \mathfrak{A}_l}{\partial v} \frac{\partial \mathfrak{A}_m}{\partial v}.$$

Entsprechende Darstellungen gelten für T_2' und T_3'.

IV. Die Inflexionstangenten.

1. Die Definition der Inflexionstangenten.

Eine Tangente $(\xi\eta)$ hat mit F eine Berührung zweiter Ordnung, wenn $T_2(\xi, \eta) = 0$, wie aus III, (5) folgt. Die hierdurch bestimmten Tangenten heißen die *Inflexionstangenten* von F in (u, v). Wir setzen

$$(1) \qquad -T_2(\xi,\eta) \equiv Q_{20}(\xi,\eta) = L_0\xi^2 + 2M_0\xi\eta + N_0\eta^2,$$

$$(2) \qquad -T_2(\xi',\eta') \equiv Q'_{20}(\xi',\eta') = L'_0\xi'^2 + 2M'_0\xi'\eta' + N'_0\eta'^2.$$

Es ist nach III, (7)

$$(3) \qquad L_0 = -\sum F_{kl}(\mathfrak{A})\frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{A}_l}{\partial u}, \qquad M_0 = -\sum_{k,l} F_{kl}(\mathfrak{A})\frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{A}_l}{\partial v},$$

$$N_0 = -\sum F_{kl}(\mathfrak{A})\frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{A}_l}{\partial v}.$$

Entsprechende Gleichungen gelten für L'_0, M'_0, N_0.

Durch Differentiation von I, (9) erhalten wir

$$(4) \qquad \sum_{(l)} F_{kl}(\mathfrak{A})\frac{\partial \mathfrak{A}_l}{\partial u} = \Re\mathfrak{D}\frac{\partial \mathfrak{A}'_k}{\partial u} + \mathfrak{A}'_k\frac{\partial(\Re\mathfrak{D})}{\partial u}.$$

Multiplizieren wir mit $\frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial u}$ und summieren über k, so folgt wegen II, (9

$$-L_0 = \Re\mathfrak{D}\sum\frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{A}'_k}{\partial u}.$$

Entsprechende Formeln gelten für M_0, N_0. Wir setzen unter Benutzung der durch Differentiation aus den Gleichungen II, (9) folgende Gleichungen

$$(5) \qquad \begin{aligned} L &= -\sum\frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{A}'_k}{\partial u} = \sum\mathfrak{A}_k\frac{\partial^2\mathfrak{A}'_k}{\partial u^2} = \sum\mathfrak{A}'_k\frac{\partial^2\mathfrak{A}_k}{\partial u^2}, \\ M &= -\sum\frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{A}'_k}{\partial v} = -\sum\frac{\partial \mathfrak{A}'_k}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial v} = \sum\mathfrak{A}_k\frac{\partial^2\mathfrak{A}'_k}{\partial u\,\partial v} = \sum\mathfrak{A}'_k\frac{\partial^2\mathfrak{A}_k}{\partial u\,\partial v}, \\ N &= -\sum\frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{A}'_k}{\partial v} = \sum\mathfrak{A}_k\frac{\partial^2\mathfrak{A}'_k}{\partial v^2} = \sum\mathfrak{A}'_k\frac{\partial^2\mathfrak{A}_k}{\partial v^2}, \end{aligned}$$

und ferner

$$(6) \qquad Q_2(\xi,\eta) = L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2.$$

Dann ist

$$(7) \qquad Q_{20}(\xi,\eta) = \Re\mathfrak{D}Q_2(\xi,\eta).$$

Bezeichnen wir die aus L, M, N durch Vertauschung von $\mathfrak{A}_\alpha$ und $\mathfrak{A}$ hervorgehenden Größen mit L', M', N', so folgt aus (5), daß $L = L'$, $M = M'$, $N = N'$. Es wird daher entsprechend zu (7)

$$(8) \qquad Q'_{20}(\xi',\eta') = \Re'\mathfrak{D}'Q_2(\xi',\eta').$$

2. Bedingung für das Zusammenfallen der beiden Inflexionstangenten.

Die beiden durch $Q_2(\xi,\eta) = 0$ oder durch $Q'_2(\xi',\eta') = 0$ definierten Inflexionstangenten fallen zusammen, wenn

$$(9) \qquad M^2 - LN = 0.$$

dererseits fallen die Inflexionstangenten bekanntlich zusammen, wenn e Hessesche Fläche

0) $$H(\mathfrak{A}) \equiv |F_{kl}(\mathfrak{A})| = 0$$

rch die Stelle (u, v) geht. Es unterscheiden sich also $M^2 - LN$ und e Determinante $|F_{kl}(\mathfrak{A})|$ nur durch einen Faktor.

3. Berechnung der Hesseschen Determinante.

Wir setzen

1) $$\mathfrak{Z} = \left|\xi_a, \mathfrak{A}_a, \frac{\partial \mathfrak{A}_a}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{A}_a}{\partial v}\right|, \quad \mathfrak{Z}' = \left|\xi'_a, \mathfrak{A}'_a, \frac{\partial \mathfrak{A}'_a}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{A}'_a}{\partial v}\right|.$$

ach (5) und (6) in I und II ist

2) $$\mathfrak{Z} = \mathfrak{R} \sum \xi_k \mathfrak{A}'_k = \mathfrak{R}\mathfrak{A}', \; \mathfrak{Z}' = \mathfrak{R}' \sum \xi'_k \mathfrak{A}_k = \mathfrak{R}'\mathfrak{A}.$$

ir bestimmen, daß zwischen den ξ_k und ξ'_k die Gleichungen bestehen sollen

3) $$\xi_1 F_{1k}(\mathfrak{A}) + \xi_2 F_{2k}(\mathfrak{A}) + \xi_3 F_{3k}(\mathfrak{A}) + \xi_4 F_{4k}(\mathfrak{A}) = \xi'_k.$$

Ferner haben wir nach dem Eulerschen Satz über homogene Funk-onen und durch Differentiation von I, (9) nach u und v

$$\mathfrak{A}_1 F_{1k}(\mathfrak{A}) + \mathfrak{A}_2 F_{2k}(\mathfrak{A}) + \mathfrak{A}_3 F_{3k}(\mathfrak{A}) + \mathfrak{A}_4 F_{4k}(\mathfrak{A}) = (n-1) F_k(\mathfrak{A}) = (n-1)\mathfrak{R}\mathfrak{D}\mathfrak{A}_k,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial u} F_{1k}(\mathfrak{A}) + \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial u} F_{2k}(\mathfrak{A}) + \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial u} F_{3k}(\mathfrak{A}) + \frac{\partial \mathfrak{A}_4}{\partial u} F_{4k}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{R}\mathfrak{D}\frac{\partial \mathfrak{A}'_k}{\partial u} + \mathfrak{A}'_k \frac{\partial(\mathfrak{R}\mathfrak{D})}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial v} F_{1k}(\mathfrak{A}) + \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial v} F_{2k}(\mathfrak{A}) + \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial v} F_{3k}(\mathfrak{A}) + \frac{\partial \mathfrak{A}_4}{\partial v} F_{4k}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{R}\mathfrak{D}\frac{\partial \mathfrak{A}'_k}{\partial v} + \mathfrak{A}'_k \frac{\partial(\mathfrak{R}\mathfrak{D})}{\partial v}.$$

aher wird

$$\mathfrak{R}\mathfrak{A}' |F_{kl}(\mathfrak{A})| = \mathfrak{Z} |F_{kl}(\mathfrak{A})| = \left|\xi_a, \mathfrak{A}_a, \frac{\partial \mathfrak{A}_a}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{A}_a}{\partial v}\right| \cdot |F_{kl}(\mathfrak{A})|$$

5) $$= \left|\xi'_a, (n-1)\mathfrak{R}\mathfrak{D}\mathfrak{A}'_a, \mathfrak{R}\mathfrak{D}\frac{\partial \mathfrak{A}'_a}{\partial u}, \mathfrak{R}\mathfrak{D}\frac{\partial \mathfrak{A}'_a}{\partial v}\right|$$

$$= (n-1)(\mathfrak{R}\mathfrak{D})^3 \mathfrak{Z}' = (n-1)(\mathfrak{R}\mathfrak{D})^3 \mathfrak{R}'\mathfrak{A}.$$

us (13) folgt aber durch Multiplikation mit $\mathfrak{A}_k$ und Addition über k ter Benutzung von (14) und (12)

$$\mathfrak{A} = \sum \xi'_k \mathfrak{A}_k = (n-1)\mathfrak{R}\mathfrak{D}\sum \xi_k \mathfrak{A}'_k = (n-1)\mathfrak{R}\mathfrak{D}\mathfrak{A}'.$$

tzen wir dies in (15) ein, so folgt

$$\mathfrak{R}\mathfrak{A}' |F_{kl}(\mathfrak{A})| = (n-1)^2 (\mathfrak{R}\mathfrak{D})^4 \mathfrak{R}'\mathfrak{A}'$$

6) $$H(\mathfrak{A}) \equiv |F_{kl}(\mathfrak{A})| = (n-1)^2 \mathfrak{R}^3 \mathfrak{D}^4 \mathfrak{R}'.$$

ual entsprechend folgt:

7) $$|F'_{kl}(\mathfrak{A}')| = (n'-1)^2 \mathfrak{R}'^3 \mathfrak{D}'^4 \mathfrak{R}.$$

4. Berechnung von $M^2 - LN$.

Es ist nach (12)

$$\mathfrak{R}\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{R}'\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\mathfrak{B}' = \left|\xi_\alpha, \mathfrak{A}_\alpha, \frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial v}\right| \cdot \left|\xi'_\alpha, \mathfrak{A}'_\alpha, \frac{\partial \mathfrak{A}'_\alpha}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{A}'_\alpha}{\partial v}\right|$$

und mit Benutzung von (5) und II, (9)

$$\mathfrak{R}\mathfrak{R}'\mathfrak{A}\mathfrak{A}' = \begin{vmatrix} \sum \xi_k \xi'_k & \mathfrak{A} & \sum \xi'_k \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial u} & \sum \xi'_k \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial v} \\ \mathfrak{A}' & 0 & 0 & 0 \\ \sum \xi_k \frac{\partial \mathfrak{A}'_k}{\partial u} & 0 & -L & -M \\ \sum \xi_k \frac{\partial \mathfrak{A}'_k}{\partial v} & 0 & -M & -N \end{vmatrix}$$

$$= \mathfrak{A}\mathfrak{A}'(M^2 - LN),$$

also

$$M^2 - LN = \mathfrak{R}\mathfrak{R}'. \tag{18}$$

Die Inflexionstangenten fallen also zusammen in den Punkten der Rückkehrkurve und der parabolischen Kurve.

Aus (16), (17) und (18) folgt

$$|F_{kl}(\mathfrak{A})| = (n-1)^2 \mathfrak{D}^4 \mathfrak{R}^2 (M^2 - LN), \tag{19}$$

$$|F'_{kl}(\mathfrak{A}')| = (n'-1)^2 \mathfrak{D}'^4 \mathfrak{R}'^2 (M^2 - LN). \tag{20}$$

V. Tangenten durch eine gegebene Gerade.

1. Bedingung dafür, daß die Tangente $(\xi\eta)$ mit der Tangente $(\xi'\eta')$ übereinstimmt.

Die Tangente $(\xi\eta)$ stimmt überein mit der Tangente $(\xi'\eta')$, wenn der Punkt mit den Koordinaten

$$y_\alpha = \mathfrak{A}_\alpha + \xi \frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial u} + \eta \frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial v} \tag{1}$$

in der Ebene liegt, deren Koordinaten sind

$$y'_\alpha = \mathfrak{A}'_\alpha + \xi' \frac{\partial \mathfrak{A}'_\alpha}{\partial u} + \eta' \frac{\partial \mathfrak{A}'_\alpha}{\partial v}, \tag{2}$$

wenn also die Gleichung besteht

$$\sum y_k y'_k = 0.$$

Setzen wir hierin die Werte der y_α, y'_α ein, so folgt wegen IV, (5) und II, (9)

$$L\xi\xi' + M(\xi\eta' + \xi'\eta) + N\eta\eta' = 0$$

$$\frac{L\xi' + M\eta'}{M\xi' + N\eta'} = -\frac{\eta}{\xi}.$$

zu ξ, η und ebenso zu ξ', η' ein Faktor beliebig hinzugefügt werden f, so können wir setzen

$$\Re\xi = -M\xi' - N\eta', \qquad \Re\eta = L\xi' + M\eta',$$

raus umgekehrt folgt

$$\Re'\xi' = -M\xi - N\eta, \qquad \Re'\eta' = L\xi + M\eta.$$

ese Gleichungen bestehen also zwischen ξ, η und ξ', η', wenn die Tanten $(\xi\eta)$ und $(\xi'\eta')$ übereinstimmen.

. Bedingung dafür, daß eine Tangente durch eine gegebene Gerade geht.

Es sei g eine gegebene Gerade. Es seien $(a'_\alpha), (b'_\alpha)$ die Koordinaten eier Ebenen durch g und $(a_\alpha), (b_\alpha)$ seien die Koordinaten zweier Punkte g. Wir setzen dann, unter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ eine gerade Permutation der r Ziffern 1, 2, 3, 4 verstehend,

$$p_{\alpha\beta} = a_\alpha b'_\beta - a'_\beta b'_\alpha = q_{\gamma\delta}, \qquad p'_{\alpha\beta} = a_\alpha b_\beta - a_\beta b_\alpha = q'_{\gamma\delta}.$$

sind die $p_{\alpha\beta}$ den $q'_{\alpha\beta}$ und die $p'_{\alpha\beta}$ den $q_{\alpha\beta}$ proportional. Wir setzen

$$p_{\alpha\beta} = q'_{\alpha\beta}, \qquad p'_{\alpha\beta} = q_{\alpha\beta},$$

daß

$$q_{\gamma\delta} = p_{\alpha\beta} = q'_{\alpha\beta} = p'_{\gamma\delta}.$$

f der Tangente $(\xi\eta)$ liegen die beiden Punkte

$$(\mathfrak{A}_\alpha) \quad \text{und} \quad \left(\mathfrak{A}_\alpha + \xi\frac{\partial\mathfrak{A}_\alpha}{\partial u} + \eta\frac{\partial\mathfrak{A}_\alpha}{\partial v}\right),$$

daß

$$\mathfrak{A}_\alpha\left(\xi\frac{\partial\mathfrak{A}_\beta}{\partial u} + \eta\frac{\partial\mathfrak{A}_\beta}{\partial v}\right) - \mathfrak{A}_\beta\left(\xi\frac{\partial\mathfrak{A}_\alpha}{\partial u} + \eta\frac{\partial\mathfrak{A}_\alpha}{\partial v}\right) = r'_{\alpha\beta}$$

Linienkoordinaten der Tangente sind. Die Bedingung dafür, daß die ade g und die Tangente $(\xi\eta)$ sich treffen, ist

$$\sum p_{\alpha\beta} r'_{\alpha\beta} = 0.$$

Wir setzen

$$\mathfrak{A}_\alpha\frac{\partial\mathfrak{A}_\beta}{\partial u} - \mathfrak{A}_\beta\frac{\partial\mathfrak{A}_\alpha}{\partial u} = (\alpha\beta)_u, \qquad \mathfrak{A}_\alpha\frac{\partial\mathfrak{A}_\beta}{\partial v} - \mathfrak{A}_\beta\frac{\partial\mathfrak{A}_\alpha}{\partial v} = (\alpha\beta)_v,$$

$$\mathfrak{A}'_\alpha\frac{\partial\mathfrak{A}'_\beta}{\partial u} - \mathfrak{A}'_\beta\frac{\partial\mathfrak{A}'_\alpha}{\partial u} = (\alpha\beta)'_u, \qquad \mathfrak{A}'_\alpha\frac{\partial\mathfrak{A}'_\beta}{\partial v} - \mathfrak{A}'_\beta\frac{\partial\mathfrak{A}'_\alpha}{\partial v} = (\alpha\beta)'_v,$$

ier

$$\sum p_{\alpha\beta}(\alpha\beta)_u = X, \qquad \sum p_{\alpha\beta}(\alpha\beta)_v = Y,$$

)

$$\sum p'_{\alpha\beta}(\alpha\beta)'_u = X', \qquad \sum p'_{\alpha\beta}(\alpha\beta)'_v = Y'.$$

Dann wird die Bedingung (6) für das Schneiden der Geraden g mit de Tangente $(\xi\eta)$:

$$X\xi + Y\eta = 0. \tag{11}$$

Dual entsprechend folgt als Bedingung für das Schneiden von g und de Tangente $(\xi'\eta')$

$$X'\xi' + Y'\eta' = 0. \tag{12}$$

Wir setzen

$$Q_1(\xi, \eta) = X\xi + Y\eta, \quad Q_1'(\xi', \eta') = X'\xi' + Y'\eta'. \tag{13}$$

Bestehen die Gleichungen (3), (4) zwischen ξ, η und ξ', η', so sin die Tangenten $(\xi\eta)$ und $(\xi'\eta')$ dieselben. Es müssen dann also auch di Bedingungen (11) und (12) dasselbe aussagen. Mit anderen Worter Die Formen $Q_1(\xi, \eta)$ und $Q_1'(\xi', \eta')$ müssen durch die Transformatione (3), (4) ineinander übergehen.

3. Beweis, daß durch die Transformation (3), (4) $Q_1(\xi, \eta)$ übergeh in $Q_1'(\xi', \eta')$.

Es ist nach I, (9)

$$F_1(\mathfrak{A}) = \Re\mathfrak{D}\mathfrak{A}_1' = \mathfrak{D}\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{D}\begin{vmatrix} \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_3 & \mathfrak{A}_4 \\ \frac{\partial\mathfrak{A}_2}{\partial u} & \frac{\partial\mathfrak{A}_3}{\partial u} & \frac{\partial\mathfrak{A}_4}{\partial u} \\ \frac{\partial\mathfrak{A}_2}{\partial v} & \frac{\partial\mathfrak{A}_3}{\partial v} & \frac{\partial\mathfrak{A}_4}{\partial v} \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Entsprechendes gilt für die anderen $F_k(\mathfrak{A})$. Es ist also einersei nach (14) und (8)

$$F_1(\mathfrak{A})\frac{\partial\mathfrak{A}_2'}{\partial u} - F_2(\mathfrak{A})\frac{\partial\mathfrak{A}_1'}{\partial u} = \Re\mathfrak{D}(12)_u', \quad F_1(\mathfrak{A})\frac{\partial\mathfrak{A}_2'}{\partial v} - F_2(\mathfrak{A})\frac{\partial\mathfrak{A}_1'}{\partial v} = \Re\mathfrak{D}(1 \tag{15}$$

andrerseits

$$F_1(\mathfrak{A})\frac{\partial\mathfrak{A}_2'}{\partial u} - F_2(\mathfrak{A})\frac{\partial\mathfrak{A}_1'}{\partial u} = \mathfrak{D}\begin{vmatrix} \mathfrak{A}_1\frac{\partial\mathfrak{A}_1'}{\partial u} + \mathfrak{A}_2\frac{\partial\mathfrak{A}_2'}{\partial u}, & \mathfrak{A}_3 & \mathfrak{A}_4 \\ \frac{\partial\mathfrak{A}_1}{\partial u}\frac{\partial\mathfrak{A}_1'}{\partial u} + \frac{\partial\mathfrak{A}_2}{\partial u}\frac{\partial\mathfrak{A}_2'}{\partial u}, & \frac{\partial\mathfrak{A}_3}{\partial u} & \frac{\partial\mathfrak{A}_4}{\partial u} \\ \frac{\partial\mathfrak{A}_1}{\partial v}\frac{\partial\mathfrak{A}_1'}{\partial u} + \frac{\partial\mathfrak{A}_2}{\partial v}\frac{\partial\mathfrak{A}_2'}{\partial u}, & \frac{\partial\mathfrak{A}_3}{\partial v} & \frac{\partial\mathfrak{A}_4}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

In der Determinante addieren wir zur ersten Vertikalreihe die mit $\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial}$ und $\frac{\partial\mathfrak{A}_4'}{\partial u}$ multiplizierte dritte und vierte. Wir erhalten dann wegen II, (und IV, (5)

$$_1(\mathfrak{A})\frac{\partial \mathfrak{A}_2'}{\partial u} - F_2(\mathfrak{A})\frac{\partial \mathfrak{A}_1'}{\partial u} = \mathfrak{D}\begin{vmatrix} 0 & \mathfrak{A}_3 & \mathfrak{A}_4 \\ -L\frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{A}_4}{\partial u} \\ -M\frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{A}_4}{\partial v} \end{vmatrix} = \mathfrak{D}\{L(34)_v - M(34)_u\}.$$

urch Vergleichen mit (15) und nach Analogie finden wir

$$\text{16)} \quad \begin{aligned} \mathfrak{R}(\alpha\beta)_u' &= L(\gamma\delta)_v - M(\gamma\delta)_u, \quad \mathfrak{R}(\alpha\beta)_v' = M(\gamma\delta)_v - N(\gamma\delta)_u, \\ \mathfrak{R}'(\alpha\beta)_u &= L(\gamma\delta)_v' - M(\gamma\delta)_u', \quad \mathfrak{R}'(\alpha\beta)_v = M(\gamma\delta)_v' - N(\gamma\delta)_u', \end{aligned}$$

o $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ eine gerade Permutation von 1, 2, 3, 4 ist.

Hieraus folgt wegen (9), (10)

$$\text{17)} \qquad \mathfrak{R}X' = -MX + LY, \quad \mathfrak{R}Y' = -NX + MY,$$

$$\text{18)} \qquad \mathfrak{R}'X = -MX' + LY', \quad \mathfrak{R}'Y = -NX' + MY'.$$

ie zweiten Gleichungen ergeben sich auch aus den ersten durch Auflösen ach X, Y. Aus (3), (4), (13) und (17), (18) ergibt sich, daß in der Tat

$$\text{19)} \qquad Q_1(\xi, \eta) = Q_1'(\xi', \eta')$$

nter der Annahme der Gleichungen (3), (4).

4. Inflexionstangenten durch eine gegebene Gerade.

Soll die Tangente $(\xi\eta)$ gleichzeitig Inflexionstangente sein und durch ie gegebene Gerade g gehen, so müssen gleichzeitig die Gleichungen $_2(\xi, \eta) = 0$ und $Q_1(\xi, \eta) = 0$ bestehen; es muß daher sein

$$\text{20)} \qquad LY^2 - 2MYX + NX^2 = 0.$$

ual entsprechend findet man die Bedingung

$$\text{21)} \qquad LY'^2 - 2MY'X' + NX'^2 = 0.$$

s können sich also die linken Seiten von (20) und (21) nicht wesentlich nterscheiden. Nun ist

$$LY^2 - 2MYX + NX^2 = (LY - MX)Y - (MY - NX)X,$$

so wegen (17) und dual entsprechend

$$\text{22)} \quad LY^2 - 2MYX + NX^2 = \mathfrak{R}(X'Y - Y'X) = -\mathfrak{R}\mathfrak{J},$$

$$\text{23)} \quad LY'^2 - 2MY'X' + NX'^2 = \mathfrak{R}'(XY' - YX') = \mathfrak{R}'\mathfrak{J},$$

enn wir setzen

$$\text{24)} \qquad \mathfrak{J} = XY' - YX'.$$

s ist dann

$$\mathfrak{J} = 0$$

die Bedingung dafür, daß eine Inflexionstangente der Stelle (u, v) durch die gegebene Gerade g geht. Alle diese Stellen liegen auf einer Kurve, die wir mit $\mathfrak{J}$ bezeichnen und eine *Tangentenkurve* von F nennen. Zu jeder Geraden g gehört also eine bestimmte Tangentenkurve.

5. Eine Gleichung.

Aus den Gleichungen (17), (18), (24) folgt noch

$$(25)\quad \mathfrak{R}'X^2-\mathfrak{R}X'^2=L\mathfrak{J},\quad \mathfrak{R}'Y^2-\mathfrak{R}Y'^2=N\mathfrak{J},\quad \mathfrak{R}'XY-\mathfrak{R}X'Y'=M\mathfrak{J}$$

und hieraus durch Multiplikation mit ξ^2, η^2, $2\xi\eta$ und Addition

$$(26)\qquad \mathfrak{R}'Q_1(\xi,\eta)^2-\mathfrak{R}Q_1'(\xi,\eta)^2=\mathfrak{J}Q_2(\xi,\eta).$$

Es ergibt sich ferner, daß die Kovariante ersten Grades der Formen Q_1 und Q_2, nämlich ihre Funktionaldeterminante, gleich $-2\mathfrak{R}Q_1'(\xi,\eta)$ ist und die von $Q_1'(\xi,\eta)$ und $Q_2(\xi,\eta)$ gleich $-2\mathfrak{R}'Q_1(\xi,\eta)$.

6. Tangenten durch zwei gegebene Gerade.

Es seien g_1, g_2 zwei Gerade; ihre Plückerschen Koordinaten seien $p_{kl}^{(1)}$, $p_{kl}^{(2)}$. Die mit $p_{kl}^{(\alpha)}$ gebildeten Größen X, Y, X', Y' seien bezeichnet mit $X_\alpha, Y_\alpha, X'_\alpha, Y'_\alpha$ und es sei gesetzt

$$(27)\qquad Q_1^{(\alpha)}(\xi,\eta)=X_\alpha\xi+Y_\alpha\eta,\qquad Q_1'^{(\alpha)}(\xi,\eta)=X'_\alpha\xi+Y'_\alpha\eta.$$

Soll die Tangente $(\xi\eta)$ oder $(\xi'\eta')$ gleichzeitig durch g_1 und g_2 gehen, so müssen die Gleichungen bestehen

$$Q_1^{(1)}(\xi,\eta)=0,\qquad Q_1^{(2)}(\xi,\eta)=0$$

oder die Gleichungen

$$Q_1'^{(1)}(\xi',\eta')=0,\qquad Q_1'^{(2)}(\xi',\eta')=0.$$

Es muß also sein

$$X_1Y_2-X_2Y_1=0,\qquad X'_1Y'_2-X'_2Y'_1=0.$$

Diese beiden Bedingungen müssen im wesentlichen übereinstimmen.

Aus (17) folgt

$$\mathfrak{R}^2(X'_1Y'_2-X'_2Y'_1)=\begin{vmatrix}-MX_1+LY_1 & -NX_1+MY_1\\ -MX_2+LY_2 & -NX_2+MY_2\end{vmatrix}$$
$$=-(M^2-LN)(X_1Y_2-X_2Y_1)=-\mathfrak{R}\mathfrak{R}'(X_1Y_2-X_2Y_1)$$

oder

$$\mathfrak{R}(X'_1Y'_2-X'_2Y'_1)=-\mathfrak{R}'(X_1Y_2-X_2Y_1).$$

Wir setzen daher

$$(28)\qquad X_1Y_2-X_2Y_1=\mathfrak{R}\mathfrak{G},\qquad X'_1Y'_2-X'_2Y'_1=-\mathfrak{R}'\mathfrak{G},$$

dann $\mathfrak{G}$ eine ganze Kurve ist. Die Bedingung dafür, daß eine Tangente rch die beiden Geraden g_1, g_2 geht, ist hiernach

$$\mathfrak{G} = 0.$$

VI. Dreifach berührende Tangenten.

1. Bedingung dafür, daß die Tangente $(\xi\eta)$ die Fläche F dreifach berührt.

Soll die Tangente $(\xi\eta)$ die Fläche F in vier zusammenfallenden nkten treffen, so muß in der Entwicklung III, (5) für $F(y)$ nicht nur s quadratische Glied $T_2(\xi, \eta)$, sondern auch das kubische Glied $T_3(\xi, \eta)$ rtfallen.

Wir setzen

$$-T_3(\xi,\eta) = Q_{30}(\xi,\eta) = A_0\xi^3 + 3B_0\xi^2\eta + 3C_0\xi\eta^2 + D_0\eta^3.$$

ist dann nach III, (8)

$$\begin{cases} A_0 = -\sum F_{klm}(\mathfrak{A})\frac{\partial\mathfrak{A}_k}{\partial u}\frac{\partial\mathfrak{A}_l}{\partial u}\frac{\partial\mathfrak{A}_m}{\partial u}, & B_0 = -\sum F_{klm}(\mathfrak{A})\frac{\partial\mathfrak{A}_k}{\partial u}\frac{\partial\mathfrak{A}_l}{\partial u}\frac{\partial\mathfrak{A}_m}{\partial v}, \\ C_0 = -\sum F_{klm}(\mathfrak{A})\frac{\partial\mathfrak{A}_k}{\partial u}\frac{\partial\mathfrak{A}_l}{\partial v}\frac{\partial\mathfrak{A}_m}{\partial v}, & D_0 = -\sum F_{klm}(\mathfrak{A})\frac{\partial\mathfrak{A}_k}{\partial v}\frac{\partial\mathfrak{A}_l}{\partial v}\frac{\partial\mathfrak{A}_m}{\partial v}, \end{cases}$$

war IV, (3), (5), (7)

$$\sum F_{kl}(\mathfrak{A})\frac{\partial\mathfrak{A}_k}{\partial u}\frac{\partial\mathfrak{A}_l}{\partial u} = -L_0 = -\mathfrak{R}\mathfrak{D}L.$$

urch Differentiation nach u folgt

$$A_0 = -\sum F_{klm}(\mathfrak{A})\frac{\partial\mathfrak{A}_k}{\partial u}\frac{\partial\mathfrak{A}_l}{\partial u}\frac{\partial\mathfrak{A}_m}{\partial u} = L\frac{\partial(\mathfrak{R}\mathfrak{D})}{\partial u} + \mathfrak{R}\mathfrak{D}\frac{\partial L}{\partial u} + 2\sum F_{kl}(\mathfrak{A})\frac{\partial\mathfrak{A}_k}{\partial u}\frac{\partial^2\mathfrak{A}_l}{\partial u^2}.$$

ist aber unter Benutzung von I, (9)

$$\sum_{(k)} F_{kl}(\mathfrak{A})\frac{\partial\mathfrak{A}_k}{\partial u} = \frac{\partial F_l(\mathfrak{A})}{\partial u} = \frac{\partial(\mathfrak{R}\mathfrak{D}\mathfrak{A}_l')}{\partial u} = \mathfrak{R}\mathfrak{D}\frac{\partial\mathfrak{A}_l'}{\partial u} + \mathfrak{A}_l'\frac{\partial(\mathfrak{R}\mathfrak{D})}{\partial u}.$$

ultiplizieren wir mit $\frac{\partial^2\mathfrak{A}_l}{\partial u^2}$ und summieren über l, so folgt

$$\sum F_{kl}(\mathfrak{A})\frac{\partial\mathfrak{A}_k}{\partial u}\frac{\partial^2\mathfrak{A}_l}{\partial u^2} = \mathfrak{R}\mathfrak{D}\sum\frac{\partial^2\mathfrak{A}_l}{\partial u^2}\frac{\partial\mathfrak{A}_l'}{\partial u} + L\frac{\partial(\mathfrak{R}\mathfrak{D})}{\partial u}.$$

urch Vergleich mit (3) folgt

$$A_0 = \mathfrak{R}\mathfrak{D}\left\{\frac{\partial L}{\partial u} + 2\sum\frac{\partial\mathfrak{A}_l'}{\partial u}\frac{\partial^2\mathfrak{A}_l}{\partial u^2}\right\} + 3L\frac{\partial(\mathfrak{R}\mathfrak{D})}{\partial u}.$$

nliche Gleichungen erhält man auf ähnlichem Wege für B_0, C_0, D_0.

Wir setzen unter Benutzung der Formeln IV, (5) für L, M, N

$$(5)\quad \begin{cases} A = \dfrac{\partial L}{\partial u} + 2\sum \dfrac{\partial \mathfrak{A}_k'}{\partial u}\dfrac{\partial^2 \mathfrak{A}_k}{\partial u} = \sum \mathfrak{A}_k' \dfrac{\partial^3 \mathfrak{A}_k}{\partial u^3} + 3\sum \dfrac{\partial \mathfrak{A}_k'}{\partial u}\dfrac{\partial^2 \mathfrak{A}_k}{\partial u^2}, \\ B = \dfrac{\partial L}{\partial v} + 2\sum \dfrac{\partial \mathfrak{A}_k'}{\partial u}\dfrac{\partial^2 \mathfrak{A}_k}{\partial u \partial v} = \dfrac{\partial M}{\partial u} + \sum \dfrac{\partial \mathfrak{A}_k'}{\partial u}\dfrac{\partial^2 \mathfrak{A}_k}{\partial u \partial v} + \sum \dfrac{\partial \mathfrak{A}_k'}{\partial v}\dfrac{\partial^2 \mathfrak{A}_k}{\partial u^2} \\ \quad = \sum \mathfrak{A}_k' \dfrac{\partial^3 \mathfrak{A}_k}{\partial u^2 \partial v} + \sum \dfrac{\partial \mathfrak{A}_k'}{\partial v}\dfrac{\partial^2 \mathfrak{A}_k}{\partial u^2} + 2\sum \dfrac{\partial \mathfrak{A}_k'}{\partial u}\dfrac{\partial^2 \mathfrak{A}_k}{\partial u \partial v}, \\ C = \dfrac{\partial M}{\partial v} + \sum \dfrac{\partial \mathfrak{A}_k'}{\partial v}\dfrac{\partial^2 \mathfrak{A}_k}{\partial u \partial v} + \sum \dfrac{\partial \mathfrak{A}_k'}{\partial u}\dfrac{\partial^2 \mathfrak{A}_k}{\partial v^2} = \dfrac{\partial N}{\partial u} + 2\sum \dfrac{\partial \mathfrak{A}_k'}{\partial v}\dfrac{\partial^2 \mathfrak{A}_k}{\partial u \partial v} \\ \quad = \sum \mathfrak{A}_k' \dfrac{\partial^3 \mathfrak{A}_k}{\partial u \partial v^2} + 2\sum \dfrac{\partial \mathfrak{A}_k'}{\partial v}\dfrac{\partial^2 \mathfrak{A}_k}{\partial u \partial v} + \sum \dfrac{\partial \mathfrak{A}_k'}{\partial u}\dfrac{\partial^2 \mathfrak{A}_k}{\partial v^2}, \\ D = \dfrac{\partial N}{\partial v} + 2\sum \dfrac{\partial \mathfrak{A}_k'}{\partial v}\dfrac{\partial^2 \mathfrak{A}_k}{\partial v^2} = \sum \mathfrak{A}_k' \dfrac{\partial^3 \mathfrak{A}_k}{\partial v^3} + 3\sum \dfrac{\partial \mathfrak{A}_k'}{\partial v}\dfrac{\partial^2 \mathfrak{A}_k}{\partial v^2} \end{cases}$$

und

$$(6)\qquad Q_3(\xi,\eta) = A\xi^3 + 3B\xi^2\eta + 3C\xi\eta^2 + D\eta^3.$$

Nach (4) und den entsprechenden andern Formeln für B_0, C_0, D_0 wird

$$(7)\qquad Q_{30}(\xi,\eta) = \mathfrak{R}\mathfrak{D}Q_3(\xi,\eta) + 3\left\{\frac{\partial(\mathfrak{R}\mathfrak{D})}{\partial u}\xi + \frac{\partial(\mathfrak{R}\mathfrak{D})}{\partial v}\eta\right\}Q_2(\xi,\eta).$$

Die Bedingungen für ξ, η, wenn die Tangente $(\xi\eta)$ von höherer als zweiter Ordnung berühren soll, sind dann $Q_2(\xi,\eta) = 0$ und $Q_3(\xi,\eta) = 0$. Daraus ergibt sich, wenn wir setzen

$$(8)\qquad \mathfrak{S} = \begin{vmatrix} L & 2M & N & 0 & 0 \\ 0 & L & 2M & N & 0 \\ 0 & 0 & L & 2M & N \\ A & 3B & 3C & D & 0 \\ 0 & A & 3B & 3C & D \end{vmatrix},$$

die Bedingung

$$\mathfrak{S} = 0.$$

Es ist $\mathfrak{S}$ eine Invariante und daher wird durch $\mathfrak{S} = 0$ eine Kurve auf F definiert, die ich die *Salmonsche Kurve* nenne, da Salmon zuerst auf sie aufmerksam gemacht hat[2]). In jedem Punkte dieser Kurve hat F eine Inflexionstangente, die von höherer als zweiter Ordnung berührt.

Wir hätten auch von der Gleichung von F in Ebenenkoordinaten ausgehen können. Wir hätten dann folgendes gefunden. Bezeichnen wir die Funktionen, die aus A, B, C, D hervorgehen, wenn man in den Def

[2]) Salmon, Cambridge and Dublin Math. Journ., 4 (1849), S. 260. — Salmon-Fiedler, Analyt. Geometrie des Raumes. II. (3. Aufl.), (1880), S. 623. — A. Clebsch, Zur Theorie der algebraischen Flächen, Journ. f. Math., 58 (1861), S. 93—108.

itionsgleichungen die gestrichenen Größen $\mathfrak{A}_k$ mit den ungestrichenen ertauscht, mit A', B', C', D' und setzen

9) $$Q_3'(\xi', \eta') = A'\xi'^3 + 3B'\xi'^2\eta' + 3C\xi'\eta'^2 + D'\eta'^3,$$

sind die Bedingungen dafür, daß die Tangente $(\xi'\eta')$ an der Stelle (u, v) ie Fläche F von höherer als zweiter Ordnung berührt,

$$Q_2(\xi', \eta') = 0, \quad Q_3'(\xi', \eta') = 0.$$

Mit Benutzung der Gleichungen, die aus II, (9) durch Differentiation ach u und v entstehen, ist aber

10) $$A' = -A, \quad B' = -B, \quad C' = -C, \quad D' = -D,$$

daß wir wieder auf die Gleichung $\mathfrak{S} = 0$ kommen.

VII. Einige Formeln.

Wir leiten einige Formeln ab, die wir später gebrauchen. Wir setzen

1) $$\mathfrak{A}_1'^2 + \mathfrak{A}_2'^2 + \mathfrak{A}_3'^2 + \mathfrak{A}_4'^2 = \sigma'$$

nd nehmen an, daß σ' nicht identisch null ist. Da die $\mathfrak{A}_\alpha'$ nur bis auf nen konstanten Faktor definiert sind, so kann diese Voraussetzung ohne eschränkung der Allgemeinheit gemacht werden. Dann ist auch die eterminante

2) $$\left|\mathfrak{A}_\alpha', \mathfrak{A}_\alpha, \frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial v}\right| = \sum \mathfrak{A}_k' \mathfrak{Z}_k = \Re \sum \mathfrak{A}_k'^2 = \Re\, \sigma'$$

on null verschieden. Wir können daher setzen

3) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathfrak{A}_\alpha}{\partial u^2} = \lambda_1 \mathfrak{A}_\alpha' + \mu_1 \mathfrak{A}_\alpha + \nu_1 \dfrac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial u} + \varrho_1 \dfrac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial^2 \mathfrak{A}_\alpha}{\partial u \partial v} = \lambda_2 \mathfrak{A}_\alpha' + \mu_2 \mathfrak{A}_\alpha + \nu_2 \dfrac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial u} + \varrho_2 \dfrac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial^2 \mathfrak{A}_\alpha}{\partial v^2} = \lambda_3 \mathfrak{A}_\alpha' + \mu_3 \mathfrak{A}_\alpha + \nu_3 \dfrac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial u} + \varrho_3 \dfrac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial v}, \end{cases}$$
$$(\alpha = 1, 2, 3, 4),$$

o die Koeffizienten $\lambda_k, \mu_k, \nu_k, \varrho_k$ von α unabhängig sind. Wir multiplizieren diese Gleichungen mit $\mathfrak{A}_\alpha'$ und summieren dann jede über α von bis 4. Wegen (1), II, (9) und IV, (5) erhalten wir

4) $$L = \lambda_1 \sigma', \quad M = \lambda_2 \sigma', \quad N = \lambda_3 \sigma'.$$

Multiplizieren wir ferner die erste der Gleichungen (3) mit $\frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha'}{\partial u}$, die weite einmal mit $\frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha'}{\partial u}$ und ein andermal mit $\frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha'}{\partial v}$ und die dritte mit $\frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha'}{\partial v}$ nd summieren die vier entstehenden Gleichungen über α von 1 bis 4, so halten wir wegen II, (9) und IV, (5)

$$(5)\quad \begin{cases} \sum \frac{\partial \mathfrak{A}'_\alpha}{\partial u}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_\alpha}{\partial u^2} = \frac{1}{2}\lambda_1 \frac{\partial \sigma'}{\partial u} - \nu_1 L - \varrho_1 M, \\ \sum \frac{\partial \mathfrak{A}'_\alpha}{\partial u}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_\alpha}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2}\lambda_2 \frac{\partial \sigma'}{\partial u} - \nu_2 L - \varrho_2 M, \\ \sum \frac{\partial \mathfrak{A}'_\alpha}{\partial v}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_\alpha}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2}\lambda_2 \frac{\partial \sigma'}{\partial v} - \nu_2 M - \varrho_2 N, \\ \sum \frac{\partial \mathfrak{A}'_\alpha}{\partial v}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_\alpha}{\partial v^2} = \frac{1}{2}\lambda_3 \frac{\partial \sigma'}{\partial v} - \nu_3 M - \varrho_3 N. \end{cases}$$

Wegen (4) und VI, (5) folgt hieraus

$$(6)\quad \begin{cases} A = \frac{\partial L}{\partial u} + L\frac{\partial \ln \sigma'}{\partial u} - 2\nu_1 L - 2\varrho_1 M, \\ B = \frac{\partial L}{\partial v} + M\frac{\partial \ln \sigma'}{\partial u} - 2\nu_2 L - 2\varrho_2 M \\ \quad = \frac{\partial M}{\partial u} + \frac{1}{2}L\frac{\partial \ln \sigma'}{\partial v} + \frac{1}{2}M\frac{\partial \ln \sigma'}{\partial u} - \nu_2 L - (\nu_1 + \varrho_2) M - \varrho_1 N, \\ C = \frac{\partial M}{\partial v} + \frac{1}{2}M\frac{\partial \ln \sigma'}{\partial v} + \frac{1}{2}N\frac{\partial \ln \sigma'}{\partial u} - \nu_3 L - (\nu_2 + \varrho_3) M - \varrho_2 N \\ \quad = \frac{\partial N}{\partial u} + M\frac{\partial \ln \sigma'}{\partial v} - 2\nu_2 M - 2\varrho_2 N, \\ D = \frac{\partial N}{\partial v} + N\frac{\partial \ln \sigma'}{\partial v} - 2\nu_3 M - 2\varrho_3 N. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (3) folgt durch Auflösen nach ν_1 und ϱ_2

$$(7)\quad \mathfrak{R}\sigma'\nu_1 = \left|\mathfrak{A}'_\alpha, \mathfrak{A}_\alpha, \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_\alpha}{\partial u^2}, \frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial v}\right|,$$

$$(8)\quad \mathfrak{R}\sigma'\varrho_2 = \left|\mathfrak{A}'_\alpha, \mathfrak{A}_\alpha, \frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial u}, \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_\alpha}{\partial u \partial v}\right|.$$

Ferner ist nach I, (5)

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{A}'_\alpha}{\partial u}, \mathfrak{A}_\alpha, \frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial v}\right| = \sum \frac{\partial \mathfrak{A}'_k}{\partial u}\mathfrak{Z}_k = \mathfrak{R}\sum \mathfrak{A}'_k \frac{\partial \mathfrak{A}'_k}{\partial u} = \frac{1}{2}\mathfrak{R}\frac{\partial \sigma'}{\partial u}.$$

Weiter ergibt sich aus (2) durch Differentiation nach u unter Beachtung von (7), (8)

$$\frac{\partial(\mathfrak{R}\sigma')}{\partial u} = \left|\frac{\partial \mathfrak{A}'_\alpha}{\partial u}, \mathfrak{A}_\alpha, \frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial v}\right| + \left|\mathfrak{A}'_\nu, \mathfrak{A}_\alpha, \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_\alpha}{\partial u^2}, \frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial v}\right| + \left|\mathfrak{A}'_\alpha, \mathfrak{A}_\alpha, \frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial u}, \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_\alpha}{\partial u \partial v}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\mathfrak{R}\frac{\partial \sigma'}{\partial u} + \mathfrak{R}\sigma'(\nu_1 + \varrho_2)$$

oder

$$(9)\quad \nu_1 + \varrho_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \sigma'}{\partial u} + \frac{\partial \ln \mathfrak{R}}{\partial u}.$$

Ebenso findet man

$$(10)\quad \nu_2 + \varrho_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \sigma'}{\partial v} + \frac{\partial \ln \mathfrak{R}}{\partial v}.$$

it Benutzung von (6) finden wir

$$AN - 2BM + CL = -\frac{\partial(M^2 - LN)}{\partial u} + (M^2 - LN)\left\{2(\nu_1 + \varrho_2) - \frac{\partial \ln \sigma'}{\partial u}\right\}$$

d wegen (9) und nach Analogie

$$AN - 2BM + CL = 2(M^2 - LN)\frac{\partial \ln \mathfrak{R}}{\partial u} - \frac{\partial(M^2 - LN)}{\partial u},$$

$$BN - 2CM + DL = 2(M^2 - LN)\frac{\partial \ln \mathfrak{R}}{\partial v} - \frac{\partial(M^2 - LN)}{\partial v}.$$

a

1) $$M^2 - LN = \mathfrak{R}\mathfrak{R}',$$

folgt weiter

2) $$AN - 2BM + CL = \mathfrak{R}'\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial u} - \mathfrak{R}\frac{\partial \mathfrak{R}'}{\partial u},$$

3) $$BN - 2CM + DL = \mathfrak{R}'\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial v} - \mathfrak{R}\frac{\partial \mathfrak{R}'}{\partial v}.$$

Wir berechnen noch folgende beiden Ausdrücke, die wir zur Abkürzung it p und q bezeichnen

4) $$p = A_0N - 2B_0M + C_0L, \quad q = B_0N - 2C_0M + D_0L.$$

s wird nach VI, (7)

$$p = \mathfrak{R}\mathfrak{D}(AN - 2BM + CL) - 4\frac{\partial(\mathfrak{R}\mathfrak{D})}{\partial u}(M^2 - LN),$$

$$q = \mathfrak{R}\mathfrak{D}(BN - 2CM + DL) - 4\frac{\partial(\mathfrak{R}\mathfrak{D})}{\partial v}(M^2 - LN).$$

'egen (11), (12), (13) folgt

$$p = \mathfrak{R}\mathfrak{R}'\mathfrak{D}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial u} - \mathfrak{R}^2\mathfrak{D}\frac{\partial \mathfrak{R}'}{\partial u} - 4\mathfrak{R}\mathfrak{R}'\frac{\partial(\mathfrak{R}\mathfrak{D})}{\partial u}$$

$$= -3\mathfrak{R}\mathfrak{R}'\mathfrak{D}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial u} - \mathfrak{R}^2\mathfrak{D}\frac{\partial \mathfrak{R}'}{\partial u} - 4\mathfrak{R}^2\mathfrak{R}'\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial u}$$

d analog

$$q = -3\mathfrak{R}\mathfrak{R}'\mathfrak{D}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial v} - \mathfrak{R}^2\mathfrak{D}\frac{\partial \mathfrak{R}'}{\partial v} - 4\mathfrak{R}^2\mathfrak{R}'\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial v}.$$

ieraus folgt weiter

5) $$\mathfrak{R}\mathfrak{D}^3 p = -\frac{\partial}{\partial u}(\mathfrak{R}^3\mathfrak{R}'\mathfrak{D}^4), \quad \mathfrak{R}\mathfrak{D}^3 q = -\frac{\partial}{\partial v}(\mathfrak{R}^3\mathfrak{R}'\mathfrak{D}^4).$$

ezeichnen wir die Hessesche Determinante von $F(\mathfrak{A})$ mit H, setzen also

$$H = |F_{kl}(\mathfrak{A})|,$$

wird nach IV, (16)

6) $$(n-1)^2\mathfrak{R}\mathfrak{D}^3 p = \frac{\partial H}{\partial u}, \quad (n-1)^2\mathfrak{R}\mathfrak{D}^3 q = \frac{\partial H}{\partial v}.$$

VIII. Die Clebschschen Tangenten.

1. Die Definition der Clebschschen Tangenten.

Die dritte Polare der Fläche F in bezug auf den Punkt (u, v) mit den Koordinaten $\mathfrak{A}_\alpha$ ist eine Fläche dritter Ordnung mit der Gleichung

$$\sum F_{klm}(\mathfrak{A})\, y_k y_l y_m = 0, \tag{1}$$

in der die y_α die laufenden Koordinaten sind. Wir bestimmen den Schnitt dieser Fläche mit der Berührungsebene im Punkte (u, v). Wir setzen zu diesem Zwecke in (1)

$$y_\alpha = \mathfrak{A}_\alpha + \xi \frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial u} + \eta \frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial v}. \tag{2}$$

Dann ist der Punkt (y) ein Punkt der Berührungsebene und wir können ξ, η als Koordinaten eines Punktes dieser Ebene auffassen. Nun gelten wegen des Eulerschen Satzes über homogene Funktionen folgende Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} &\sum F_{klm}(\mathfrak{A})\,\mathfrak{A}_k\mathfrak{A}_l\mathfrak{A}_m = n(n-1)(n-2)F(\mathfrak{A}) \equiv 0,\\ &\sum F_{klm}(\mathfrak{A})\,\mathfrak{A}_k\mathfrak{A}_l\frac{\partial \mathfrak{A}_m}{\partial u} = (n-1)(n-2)\sum F_m(\mathfrak{A})\frac{\partial \mathfrak{A}_m}{\partial v}\\ &\qquad\qquad = (n-1)(n-2)\frac{\partial F}{\partial u} \equiv 0,\\ &\sum F_{klm}(\mathfrak{A})\,\mathfrak{A}_k\mathfrak{A}_l\frac{\partial \mathfrak{A}_m}{\partial v} = (n-1)(n-2)\sum F_m(\mathfrak{A})\frac{\partial \mathfrak{A}_m}{\partial v}\\ &\qquad\qquad = (n-1)(n-2)\frac{\partial F}{\partial v} \equiv 0, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\sum F_{klm}(\mathfrak{A})\,\mathfrak{A}_k\frac{\partial \mathfrak{A}_l}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{A}_m}{\partial u} = (n-2)\sum F_{lm}(\mathfrak{A})\frac{\partial \mathfrak{A}_l}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{A}_m}{\partial u} = -(n-2)L_0,\\ &\sum F_{klm}(\mathfrak{A})\,\mathfrak{A}_k\frac{\partial \mathfrak{A}_l}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{A}_m}{\partial v} = (n-2)\sum F_{lm}(\mathfrak{A})\frac{\partial \mathfrak{A}_l}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{A}_m}{\partial v} = -(n-2)M_0,\\ &\sum F_{klm}(\mathfrak{A})\,\mathfrak{A}_k\frac{\partial \mathfrak{A}_l}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{A}_m}{\partial v} = (n-2)\sum F_{lm}(\mathfrak{A})\frac{\partial \mathfrak{A}_l}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{A}_m}{\partial v} = -(n-2)N_0, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Daher folgt aus (1) und (2) wegen VI (1), (2)

$$k(\xi, \eta) \equiv Q_{30}(\xi, \eta) + 3(n-2)Q_{20}(\xi, \eta) = 0, \tag{5}$$

wo $k(\xi, \eta)$ zur Abkürzung eingeführt ist. Wir bezeichnen die hierdurch definierte Kurve dritter Ordnung mit k. Sie hat im Punkte $\xi = \eta = 0$, d. h. im Berührungspunkte (u, v) der Berührungsebene einen Doppelpunkt. Daher hat sie drei Wendepunkte. Die Tangenten von F vom Punkte (u, v) nach diesen Wendepunkten nennen wir die Clebschschen Tangenten[3]) von

[3]) A. Clebsch, Zur Theorie der algebraischen Flächen, Journal für Math., 63 (1864), S. 14–26.

an der Stelle (u, v). Genauer nennen wir sie das *erste Tripel Clebschscher Tangenten* und verstehen unter dem *zweiten Tripel die dem ersten dual entsprechenden Tangenten.*

2. Bestimmung der Wendepunkte der Kurve k.

Wir führen zunächst an Stelle von ξ, η neue Größen ein durch folgende lineare Substitution. Es sei in Linearfaktoren zerlegt

$$\begin{cases} Q_2(\xi, \eta) = L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2 = (\beta\xi - \alpha\eta)(\delta\xi - \gamma\eta) \\ \qquad = N(\eta - \lambda\xi)(\eta - \mu\xi), \end{cases}$$

daß

$$\beta\delta = L, \quad \alpha\delta + \beta\gamma = -2M, \quad \alpha\gamma = N,$$
$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = 4(M^2 - LN) = 4\mathfrak{R}\mathfrak{R}'.$$

sei

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{N}(-M + \sqrt{M^2 - LN}) = \frac{1}{N}(-M + \sqrt{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'}), \\ \mu = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{1}{N}(-M - \sqrt{M^2 - LN}) = \frac{1}{N}(-M - \sqrt{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'}). \end{cases}$$

wird dann

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{L}(-M - \sqrt{M^2 - LN}) = \frac{1}{L}(-M - \sqrt{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'}), \\ \frac{1}{\mu} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{1}{L}(-M + \sqrt{M^2 - LN}) = \frac{1}{L}(-M + \sqrt{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'}). \end{cases}$$

Bei diesen Festsetzungen ergibt sich, daß

$$\alpha\delta - \beta\gamma = -2\sqrt{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'}.$$

Wir führen jetzt neue Veränderliche ein durch die Gleichungen

$$\beta\xi - \alpha\eta = \xi_1, \quad \delta\xi - \gamma\eta = \eta_1,$$

aus denen umgekehrt folgt

$$\gamma\xi_1 - \alpha\eta_1 = 2\xi\sqrt{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'}, \quad \delta\xi_1 - \beta\eta_1 = 2\eta\sqrt{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'}.$$

wird dann

$$Q_{20}(\xi, \eta) = \mathfrak{R}\mathfrak{D}Q_2(\xi, \eta) = \mathfrak{R}\mathfrak{D}\xi_1\eta_1$$

und es werde gesetzt

$$Q_{30}(\xi, \eta) = \psi(\xi_1, \eta_1).$$

Die Gleichung der Kurve k dritter Ordnung ist dann

$$g(\xi_1, \eta_1) \equiv \psi(\xi_1, \eta_1) + 3(n-2)\mathfrak{R}\mathfrak{D}\xi_1\eta_1 = 0.$$

ist ψ eine Form dritten Grades von ξ_1, η_1. Setzen wir

$$\psi = a\xi_1^3 + 3b\xi_1^2\eta_1 + 3c\xi_1\eta_1^2 + d\eta_1^3,$$

so ist nach (12), (14)

$$(17) \qquad a = \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{D}\, Q_3(\gamma, \delta)}{8(\sqrt{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'})^3}, \quad d = -\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{D}\, Q_3(\alpha, \beta)}{8(\sqrt{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'})^3}.$$

Es sei hier gleich bemerkt, daß $Q_3(\alpha, \beta) \cdot Q_3(\gamma, \delta)$ die Resultante von Q_3 und Q_2 ist, also gleich der durch VI, (8) definierten Funktion $\mathfrak{S}$, so daß

$$(18) \qquad Q_3(\alpha, \beta) \cdot Q_3(\gamma, \delta) = \mathfrak{S}.$$

Führen wir vorübergehend homogene Koordinaten ein, indem wir ξ_1, η ersetzen durch $\xi_1 : \zeta_1$, $\eta_1 : \zeta_1$, so können wir die Gleichung von k in der Form schreiben

$$g(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \equiv \psi(\xi_1, \eta_1) + 3(n-2)\mathfrak{R}\mathfrak{D}\,\xi_1\eta_1\zeta_1 = 0.$$

Bezeichnen wir die Ableitungen nach ξ_1, η_1, ζ_1 durch Hinzufügen der Indizes 1, 2, 3, so ist die Gleichung der Hesseschen Kurve von k

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \psi_{11}, & \psi_{12} + 3(n-2)\mathfrak{R}\mathfrak{D}\,\zeta_1, & 3(n-2)\mathfrak{R}\mathfrak{D}\,\eta \\ \psi_{21} + 3(n-2)\mathfrak{R}\mathfrak{D}\,\zeta_1, & \psi_{22}, & 3(n-2)\mathfrak{R}\mathfrak{D}\,\delta \\ 3(n-2)\mathfrak{R}\mathfrak{D}\,\eta_1, & 3(n-2)\mathfrak{R}\mathfrak{D}\,\xi_1, & 0 \end{vmatrix}$$

oder, wenn wir den Faktor $9(n-2)^2(\mathfrak{R}\mathfrak{D})^2$ fortlassen und wieder $\zeta_1 = 1$ setzen:

$$h(\xi_1, \eta_1) \equiv \begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} + 3(n-2)\mathfrak{R}\mathfrak{D} & \eta_1 \\ \psi_{21} + 3(n-2)\mathfrak{R}\mathfrak{D} & \psi_{22} & \xi_1 \\ \eta_1 & \xi_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(19) \quad h(\xi_1, \eta_1) \equiv \psi_{11}\xi_1^2 - 2\psi_{12}\xi_1\eta_1 + \psi_{21}\eta_1^2 - 6(n-2)\mathfrak{R}\mathfrak{D}\,\xi_1\eta_1 = 0.$$

Die Hessesche Kurve h hat also im Punkte $\xi_1 = \eta_1 = 0$ einen Doppelpunkt und die beiden Tangenten stimmen überein mit denen von k. Daher haben die Kurven h und k im Nullpunkte 6 gemeinsame Schnittpunkte, so daß noch drei übrig bleiben. Das sind die drei Wendepunkte von k.

Aus dem Eulerschen Satz über homogene Funktionen folgt

$$\psi_{11}\xi_1^2 + 2\psi_{12}\xi_1\eta_1 + \psi_{22}\eta_1^2 = 6\psi.$$

Daher können wir (19) auch schreiben

$$(20) \qquad 3\psi - 2\psi_{12}\xi_1\eta_1 - 3(n-2)\mathfrak{R}\mathfrak{D}\,\xi_1\eta_1 = 0.$$

Diese Gleichung liefert mit (15) zusammen die Wendepunkte von k. Aus den beiden Gleichungen (15), (20) folgen die beiden Gleichungen

$$\psi_{12} + 6(n-2)\Re\mathfrak{D} = 0,$$

$$2\psi - \psi_{12}\xi_1\eta_1 = 0,$$

wir an ihrer statt benutzen.

Wir führen wieder die Veränderlichen ξ, η ein. Zur Abkürzung zen wir

$$Q_{30}(\xi, \eta) = \varphi$$

d bezeichnen die Ableitungen von φ nach ξ, η durch die Indizes 1 d 2. Aus (11), (14) und (23) folgt

$$\psi_{12} = -\frac{1}{4\Re\Re'}\{\varphi_{11}\alpha\gamma + \varphi_{12}(\alpha\delta + \beta\gamma) + \varphi_{22}\beta\delta\}$$

er wegen (7)

$$\psi_{12} = -\frac{1}{4\Re\Re'}\{N\varphi_{11} - 2M\varphi_{12} + L\varphi_{22}\}.$$

her ergeben sich aus (21), (22) folgende beide Gleichungen für die ordinaten ξ, η der Wendepunkte von k

$$l(\xi, \eta) \equiv N\varphi_{11} - 2M\varphi_{12} + L\varphi_{22} - 24(n-2)\Re^2\Re'\mathfrak{D} = 0,$$

$$w(\xi, \eta) \equiv 4\Re\Re'(2\psi - \psi_{12}\xi_1\eta_1)$$
$$\equiv 8\Re\Re'\varphi + (N\varphi_{11} - 2M\varphi_{12} + L\varphi_{22})Q_2(\xi, \eta) = 0.$$

3. Ein Satz von Clebsch.

Die Gleichung $l(\xi, \eta) = 0$ ist die Gleichung einer Geraden. Die drei endepunkte liegen also, wie bekannt, auf einer Geraden. Wir können e Gleichung so umformen, daß sich ein Satz von Clebsch über die endepunkte ergibt. Es wird nämlich wegen (23) und VII, (14)

$$N\varphi_{11} - 2M\varphi_{12} + L\varphi_{22}$$
$$6(A_0N - 2B_0M + C_0L)\xi + 6(B_0N - 2C_0M + D_0L)\eta = 6(p\xi + q\eta).$$

Hieraus folgt wegen VII, (16)

$$N\varphi_{11} - 2M\varphi_{12} + L\varphi_{22} = -\frac{6}{(n-1)^2\Re\mathfrak{D}^3}\left\{\xi\frac{\partial H}{\partial u} + \eta\frac{\partial H}{\partial v}\right\}.$$

wird hiernach und wegen IV, (16)

$$-\frac{1}{6}(n-1)^2\Re\mathfrak{D}^3 l(\xi, \eta) = \xi\frac{\partial H}{\partial u} + \eta\frac{\partial H}{\partial v} + 4(n-2)H,$$

daß die Gleichung der Geraden, auf der die drei Wendepunkte von k gen, in der Form geschrieben werden kann

$$\xi\frac{\partial H}{\partial u} + \eta\frac{\partial H}{\partial v} + 4(n-2)H = 0.$$

Diese Gleichung geht aber aus der Gleichung

$$y_1 \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{A}_1} + y_2 \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{A}_2} + y_3 \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{A}_3} + y_4 \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{A}_4} = 0 \tag{28}$$

durch die Substitution (2) hervor, wobei man zu beachten hat, daß H eine homogene Funktion der $\mathfrak{A}_\alpha$ vom Grade $4(n-2)$ ist. Es liegen also die Wendepunkte von k auch in der durch die Gleichung (28) gegebenen Ebene. Diese ist aber die erste Polare von H in bezug auf den Punkt (u, v). Damit ist der Satz von Clebsch[4]) bewiesen:

Die erste Polare der Hesseschen Fläche einer Fläche F in bezug auf den Punkt (x) von F geht durch die drei Wendepunkte derjenigen Kurve dritter Ordnung, in der die Berührungsebene von F in (x) die dritte Polare von F in bezug auf (x) schneidet.

4. Das erste Tripel der Clebschschen Tangenten.

Die Gleichung (25), nämlich $w(\xi, \eta) = 0$, ist homogen in ξ, η. Sie liefert uns also die Verhältnisse $\eta : \xi$ für die Wendepunkte von k, sie bestimmt also die drei Tangenten $(\xi\eta)$, die durch diese Punkte gehen, also das erste Tripel der Clebschschen Tangenten. Unter Benutzung von (26) erhalten wir

$$(n-1)^2 \mathfrak{R}\mathfrak{D}^3 w(\xi, \eta) = 8(n-1)^2 \mathfrak{R}^2 \mathfrak{D}^3 \mathfrak{R}' Q_{30} - 6\left\{\xi \frac{\partial H}{\partial u} + \eta \frac{\partial H}{\partial v}\right\} Q_2$$

oder nach Multiplikation mit $\mathfrak{R}\mathfrak{D}$

$$(n-1)^2 \mathfrak{R}^2 \mathfrak{D}^4 w(\xi, \eta) = 8(n-1)^2 \mathfrak{R}^3 \mathfrak{D}^4 \mathfrak{R}' Q_{30} - 6\left\{\xi \frac{\partial H}{\partial u} + \eta \frac{\partial H}{\partial v}\right\} Q_{20}$$

und wegen IV, (16)

$$(n-1)^2 \mathfrak{R}^2 \mathfrak{D}^4 w(\xi, \eta) = 8 H Q_{30} - 6\left\{\xi \frac{\partial H}{\partial u} + \eta \frac{\partial H}{\partial v}\right\} Q_{20}. \tag{29}$$

Wir setzen

$$Q_{40}(\xi, \eta) = 4 H Q_{30}(\xi, \eta) - 3\left\{\xi \frac{\partial H}{\partial u} + \eta \frac{\partial H}{\partial v}\right\} Q_{20}(\xi, \eta) \tag{30}$$

und auch

$$Q_{40}(\xi, \eta) = \mathsf{A}_0 \xi^3 + 3\mathsf{B}_0 \xi^2 \eta + 3\Gamma_0 \xi \eta^2 + \Delta_0 \eta^3, \tag{31}$$

so daß

$$\begin{aligned} \mathsf{A}_0 &= 4 H A_0 - 3 L_0 \frac{\partial H}{\partial u}, \quad \mathsf{B}_0 = 4 H B_0 - 2 M_0 \frac{\partial H}{\partial u} - L_0 \frac{\partial H}{\partial v}, \\ \Delta_0 &= 4 H D_0 - 3 N_0 \frac{\partial H}{\partial v}, \quad \Gamma_0 = 4 H C_0 - N_0 \frac{\partial H}{\partial u} - 2 M_0 \frac{\partial H}{\partial v}. \end{aligned} \tag{32}$$

Wegen IV, (7) und VI, (7) folgt aus (30)

---

[4]) A. Clebsch, am unter [3]) angeg. Orte S. 18.

$$= \Re \mathfrak{D} H \Big\{ 4 Q_3 - 3 \Big[\Big(\frac{\partial \ln H}{\partial u} - 4 \frac{\partial \ln (\Re \mathfrak{D})}{\partial u} \Big) \xi + \Big(\frac{\partial \ln H}{\partial v} - 4 \frac{\partial \ln (\Re \mathfrak{D})}{\partial v} \Big) \eta \Big] Q_2 \Big\}$$

hieraus, da nach IV, (16)

$$\frac{H}{(\Re \mathfrak{D})^4} = (n-1)^2 \frac{\Re'}{\Re},$$

$$Q_{40}(\xi, \eta) = \Re \mathfrak{D} H \Big\{ 4 Q_3 - 3 \Big[\Big(\frac{\partial \ln \Re'}{\partial u} - \frac{\partial \ln \Re}{\partial u} \Big) \xi + \Big(\frac{\partial \ln \Re'}{\partial v} - \frac{\partial \ln \Re}{\partial v} \Big) \eta \Big] Q_2 \Big\}.$$

Wir setzen

$$Q_4(\xi, \eta) = 4 \Re \Re' Q_3(\xi, \eta) - 3 \Big\{ \Big(\Re \frac{\partial \Re'}{\partial u} - \Re' \frac{\partial \Re}{\partial u} \Big) \xi + \Big(\Re \frac{\partial \Re'}{\partial v} - \Re' \frac{\partial \Re}{\partial v} \Big) \eta \Big\} Q_2(\xi, \eta),$$

aß nach (33)

$$Q_{40}(\xi, \eta) = (n-1)^2 \Re^3 \mathfrak{D}^5 Q_4(\xi, \eta)$$

wegen (25) und (29)

$$2 \Re \mathfrak{D} Q_4(\xi, \eta) = w(\xi, \eta) = 4 \Re \Re' (2\psi - \psi_{12} \xi_1 \eta_1).$$

Wir schreiben auch

$$Q_4(\xi, \eta) = \mathrm{A} \xi^3 + 3 \mathrm{B} \xi^2 \eta + 3 \Gamma \xi \eta^2 + \Delta \eta^3.$$

Es liefert uns dann

$$Q_{40}(\xi, \eta) = 0 \quad \text{oder} \quad Q_4(\xi, \eta) = 0$$

erste Tripel der Clebschschen Tangenten.

5. Das zweite Tripel der Clebschschen Tangenten.

Die Form, die aus $Q_4(\xi, \eta)$ hervorgeht, dadurch, daß wir die gehenen Größen mit den ungestrichenen vertauschen, bezeichnen wir $Q_4'(\xi', \eta')$. Da wir früher gesehen haben, daß $Q_3'(\xi, \eta) = -Q_3(\xi, \eta)$ $Q_2'(\xi, \eta) = Q_2(\xi, \eta)$, so folgt aus (34)

$$Q_4'(\xi, \eta) = -Q_4(\xi, \eta).$$

Die Gleichung $Q_4'(\xi', \eta') \equiv -Q_4(\xi', \eta') = 0$ liefert uns, da sie der ichung $Q_4(\xi, \eta) = 0$ dual entspricht, diejenigen Tangenten (ξ', η'), die bisher definierten Clebschschen Tangenten dual entsprechen, also zweite Tripel der Clebschschen Tangenten. In welcher Beziehung erste und zweite Tripel zueinander stehen, werden wir in Nr. 8 sehen.

6. Die quadratische Kovariante K_2 der Form $Q_4(\xi, \eta)$.

Nach (36) ist

$$2 \Re \mathfrak{D} Q_4(\xi, \eta) = 4 \Re \Re' (2\psi - \psi_{12} \xi_1 \eta_1).$$

Unter Benutzung von (16) und (17) folgt hieraus

$$2\,\mathfrak{R}\mathfrak{D}Q_4(\xi,\eta) = 8\,\mathfrak{R}\mathfrak{R}'(a\xi_1^3 + d\eta_1^3),$$

$$Q_4(\xi,\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'}}\{Q_3(\gamma,\delta)\xi_1^3 - Q_3(\alpha,\beta)\eta_1^3\}. \tag{39}$$

Die quadratische Kovariante K_2 von Q_4 ist nach Definition d Hessesche Determinante von Q_4, also

$$K_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Q_4}{\partial\xi^2} & \frac{\partial^2 Q_4}{\partial\xi\,\partial\eta} \\ \frac{\partial^2 Q_4}{\partial\eta\,\partial\xi} & \frac{\partial^2 Q_4}{\partial\eta^2} \end{vmatrix}$$

Verwandeln wir mit Hilfe von (11) die Ableitungen nach ξ, η solche nach ξ_1, η_1, so folgt

$$K_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_4}{\partial\xi_1^2} & \frac{\partial^2 Q_4}{\partial\xi_1\,\partial\eta_1} \\ \frac{\partial^2 Q_4}{\partial\eta_1\,\partial\xi_1} & \frac{\partial^2 Q_4}{\partial\eta_1^2} \end{vmatrix} (\alpha\delta - \beta\gamma)^2,$$

also wegen (39) und (7)

$$K_2 = \frac{-36}{4\,\mathfrak{R}\mathfrak{R}'} Q_3(\alpha,\beta)\,Q_3(\gamma,\delta)\,\xi_1\eta_1 \cdot 4\,\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$$

$$= -36\,Q_3(\alpha,\beta)\,Q_3(\gamma,\delta)\,\xi_1\eta_1$$

und wegen (13) und (18)

$$K_2 = -36\,\mathfrak{S}Q_2(\xi,\eta). \tag{40}$$

7. Die kubische Kovariante K_3 von $Q_4(\xi,\eta)$.

Die kubische Kovariante K_3 von $Q_4(\xi,\eta)$ ist nach Definition d Funktionaldeterminante von Q_4 und der quadratischen Kovariante. W lassen bei der quadratischen Kovarianten K_2 den hier unwesentlich Faktor $-36\,\mathfrak{S}$ fort und haben

$$K_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_2}{\partial\xi} & \frac{\partial Q_2}{\partial\eta} \\ \frac{\partial Q_4}{\partial\xi} & \frac{\partial Q_4}{\partial\eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_2}{\partial\xi_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial\eta_1} \\ \frac{\partial Q_4}{\partial\xi_1} & \frac{\partial Q_4}{\partial\eta_1} \end{vmatrix} (\alpha\delta - \beta\gamma)$$

$$= \frac{-3}{2\sqrt{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'}}\{Q_3(\gamma,\delta)\xi_1^3 + Q_3(\alpha,\beta)\eta_1^3\} \cdot (-2\sqrt{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'}),$$

$$K_3 = 3\{Q_3(\gamma,\delta)\xi_1^3 + Q_3(\alpha,\beta)\eta_1^3\}. \tag{41}$$

8. Die Form $Q_4(\xi', \eta')$.

Setzen wir, entsprechend (11),

$$\beta\xi' - \alpha\eta' = \xi_1', \qquad \delta\xi' - \gamma\eta' = \eta_1',$$

st nach (39)

$$Q_4(\xi', \eta') = \frac{1}{2\sqrt{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'}}\{Q_3(\gamma, \delta)\,\xi_1'^3 - Q_3(\alpha, \beta)\,\eta_1'^3\}.$$

Nach V, (4) bestehen die Gleichungen

$$\mathfrak{R}'\xi' = -M\xi - N\eta, \qquad \mathfrak{R}'\eta' = L\xi + M\eta,$$

n $(\xi\eta)$ und $(\xi'\eta')$ dieselbe Tangente darstellen. Es folgt

$$\mathfrak{R}'\xi_1' = -\beta\left(M + \frac{\alpha}{\beta}L\right)\xi - \alpha\left(\frac{\beta}{\alpha}N + M\right)\eta,$$

$$\mathfrak{R}'\eta_1' = -\delta\left(M + \frac{\gamma}{\delta}L\right)\xi - \gamma\left(\frac{\delta}{\gamma}N + M\right)\eta,$$

wegen (8) und (9)

$$\mathfrak{R}'\xi_1' = \sqrt{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'}\,(\beta\xi - \alpha\eta),$$

$$\mathfrak{R}'\eta_1' = -\sqrt{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'}\,(\delta\xi - \gamma\eta),$$

endlich wegen (11)

$$\sqrt{\mathfrak{R}'}\,\xi_1' = \sqrt{\mathfrak{R}}\,\xi_1, \qquad \sqrt{\mathfrak{R}'}\,\eta_1' = -\sqrt{\mathfrak{R}}\,\eta_1.$$

Setzen wir dies in (43) ein, so finden wir

$$Q_4(\xi', \eta') = \frac{\mathfrak{R}}{2\,\mathfrak{R}'\sqrt{\mathfrak{R}'}}\{Q_3(\gamma, \delta)\,\xi_1^3 + Q_3(\alpha, \beta)\,\eta_1^3\},$$

wegen (41)

$$Q_4(\xi', \eta') = \frac{\mathfrak{R}}{6\,\mathfrak{R}'\sqrt{\mathfrak{R}'}}K_3(\xi, \eta).$$

Wir haben hiernach das Ergebnis:

Das eine Tripel der Clebschschen Tangenten wird durch Nullsetzen r kubischen Form erhalten, das andere durch Nullsetzen der kubischen ariante dieser Form.

Wir sehen ferner: Das eine Tripel ist gegeben durch die Gleichung

$$Q_3(\gamma, \delta)\,\xi_1^3 + Q_3(\alpha, \gamma)\,\eta_1^3 = 0,$$

andere durch

$$Q_3(\gamma, \delta)\,\xi_1^3 - Q_3(\alpha, \gamma)\,\eta_1^3 = 0.$$

Ergibt sich aus der einen Gleichung

$$\eta_1 = \lambda_1\xi_1, \qquad \eta_1 = \lambda_2\xi_1, \qquad \eta_1 = \lambda_3\xi_1,$$

so folgt aus der anderen

$$\eta_1 = -\lambda_1 \xi_1, \quad \eta_1 = -\lambda_2 \xi_1, \quad \eta_1 = -\lambda_3 \xi_1.$$

Da $\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$ die Inflexionstangenten sind, so folgt:

Jede Tangente des einen Tripels der Clebschschen Tangenten bild mit einer des anderen Tripels und den beiden Inflexionstangenten vi harmonische Strahlen.

Hieraus ergibt sich noch:

Fallen an einer Stelle von F die Inflexionstangenten zusammen, fallen auch alle sechs Clebschschen Tangenten mit ihnen zusammen.

Wir bezeichnen noch die Form von ξ, η, die aus

$$\frac{\Re'}{\Re\sqrt{\Re}} Q_4(\xi', \eta')$$

hervorgeht, wenn wir statt der ξ', η' die ξ, η einführen, also im wesen lichen die kubische Kovariante von $Q_4(\xi, \eta)$ mit $P_4(\xi, \eta)$. Nach (42 (45) ist also

$$(47) \qquad Q_4(\xi, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\Re\Re'}} \{Q_3(\gamma, \delta)\, \xi_1^3 - Q_3(\alpha, \beta)\, \eta_1^3\},$$

$$(48) \qquad P_4(\xi, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\Re\Re'}} \{Q_3(\gamma, \delta)\, \xi_1^3 + Q_3(\alpha, \beta)\, \eta_1^3\}.$$

Von diesen beiden Formen ist dann jede bis auf einen Faktor kubische Kovariante der anderen.

Wir setzen auch

$$(49) \qquad P_4(\xi, \eta) = \mathsf{A}'\xi^3 + 3\,\mathsf{B}'\xi^2\eta + 3\,\Gamma'\xi\eta^2 + \Delta'\eta^3.$$

Um die Gleichungen aufzustellen, die zwischen den Koeffizienten v Q_4 und denen von P_4 bestehen, gehen wir auf die Definition von P_4 rück. Danach ist

$$(50) \qquad P_4(\xi, \eta) = \frac{\Re'}{\Re\sqrt{\Re}} Q_4(\xi', \eta')$$

und nach V, (4)

$$P_4(\xi, \eta) = \frac{1}{\Re\Re'^2\sqrt{\Re}} Q_4(-M\xi - N\eta,\ L\xi + M\eta).$$

Hieraus folgt

$$(51) \qquad \begin{aligned}
\Re\Re'^2\sqrt{\Re}\,\mathsf{A}' &= -M^3\mathsf{A} + 3LM^2\mathsf{B} - 3L^2M\Gamma + L^3\Delta,\\
\Re\Re'^2\sqrt{\Re}\,\mathsf{B}' &= -M^2N\mathsf{A} + M(2LN + M^2)\mathsf{B} - L(LN + 2M^2)\Gamma +\\
\Re\Re'\sqrt{\Re}\,\Gamma' &= -MN^2\mathsf{A} + N(LN + 2M^2)\mathsf{B} - M(2LN + M^2)\Gamma +\\
\Re\Re'\sqrt{\Re}\,\Delta' &= -N^3\mathsf{A} + 3MN^2\mathsf{B} - 3M^2N\Gamma + M^3\Delta.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen bleiben richtig, wenn man die gestrichenen Größen t den ungestrichenen vertauscht, wobei zu beachten ist, daß nach iherem $L' = L$, $M' = M$, $N' = N$.

IX. Bedingung dafür, daß eine Clebschsche Tangente durch eine gegebene Gerade g geht.

1. Die Bedingung.

Soll die Tangente $(\xi\eta)$ gleichzeitig dem ersten Tripel der Clebschnen Tangenten angehören und durch die gegebene Gerade g gehen, so üssen ξ, η den beiden Gleichungen genügen

$$Q_1(\xi, \eta) = 0, \quad Q_4(\xi, \eta) = 0.$$

Setzen wir

$$Q_4(Y, -X) = \mathfrak{U},$$

ist die gesuchte Bedingung

$$\mathfrak{U} = 0,$$

h. es muß die Berührungsstelle der Tangente auf der durch (1) definierten urve $\mathfrak{U}$ liegen.

Soll die Tangente $(\xi'\eta')$ gleichzeitig dem zweiten Tripel der Clebschhen Tangenten angehören und durch die gegebene Gerade g gehen, so üssen ξ', η' den beiden Gleichungen genügen

$$Q_1'(\xi', \eta') = 0, \quad Q_4(\xi', \eta) = 0.$$

Setzen wir also

$$Q_4(Y', -X') = \mathfrak{U}',$$

ist die gesuchte Bedingung

$$\mathfrak{U}' = 0.$$

2. Gleichungen für $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}'$.

Aus den Definitionsgleichungen (1), (2) ergibt sich in Verbindung it VIII, (39), (43), (11) und (42)

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{2\sqrt{\Re\Re'}}\{Q_3(\gamma, \delta)(\alpha X + \beta Y)^3 - Q_3(\alpha, \beta)(\gamma X + \delta Y)^3\},$$

$$\mathfrak{U}' = \frac{1}{2\sqrt{\Re\Re'}}\{Q_3(\gamma, \delta)(\alpha X' + \beta Y')^3 - Q_3(\alpha, \beta)(\gamma X' + \delta Y')^3\}.$$

esen Gleichungen wollen wir noch eine andere Form geben. Es ist ch VIII, (8), (9)

$$\alpha X + \beta Y = \alpha\left(X + \frac{\beta}{\alpha} Y\right) = \frac{\alpha}{N}(XN - YM + Y\sqrt{\Re\Re'})$$

und dies gibt wegen V, (17)

$$\alpha X + \beta Y = \frac{\alpha\sqrt{\mathfrak{R}}}{N}(Y\sqrt{\mathfrak{R}'} - Y'\sqrt{\mathfrak{R}}).$$

Wir erhalten auf diese Art folgende Gruppe von Gleichungen

$$(5)\quad \begin{cases} \alpha X + \beta Y = \frac{\alpha\sqrt{\mathfrak{R}}}{N}(Y\sqrt{\mathfrak{R}'} - Y'\sqrt{\mathfrak{R}}) = -\frac{\beta\sqrt{\mathfrak{R}}}{L}(X\sqrt{\mathfrak{R}'} - X'\sqrt{\mathfrak{R}}) \\ \gamma X + \delta Y = -\frac{\gamma\sqrt{\mathfrak{R}}}{N}(Y\sqrt{\mathfrak{R}'} + Y'\sqrt{\mathfrak{R}}) = \frac{\delta\sqrt{\mathfrak{R}}}{L}(X\sqrt{\mathfrak{R}'} + X'\sqrt{\mathfrak{R}}) \\ \alpha X' + \beta Y' = -\frac{\alpha\sqrt{\mathfrak{R}'}}{N}(Y\sqrt{\mathfrak{R}'} - Y'\sqrt{\mathfrak{R}}) = \frac{\beta\sqrt{\mathfrak{R}'}}{L}(X\sqrt{\mathfrak{R}'} - X'\sqrt{\mathfrak{R}}) \\ \gamma X' + \delta Y' = -\frac{\gamma\sqrt{\mathfrak{R}'}}{N}(Y'\sqrt{\mathfrak{R}} + Y\sqrt{\mathfrak{R}'}) = \frac{\delta\sqrt{\mathfrak{R}'}}{L}(X'\sqrt{\mathfrak{R}} + X\sqrt{\mathfrak{R}'}) \end{cases}$$

Es ergibt sich also aus (3) und (4) unter anderem

$$(6)\quad \mathfrak{U} = \frac{\mathfrak{R}}{2N^3\sqrt{\mathfrak{R}'}}\{\alpha^3 Q_3(\gamma,\delta)(Y\sqrt{\mathfrak{R}'} - Y'\sqrt{\mathfrak{R}})^3 + \gamma^3 Q_3(\alpha,\beta)(Y\sqrt{\mathfrak{R}'} + Y'\sqrt{\mathfrak{R}}$$

$$(7)\quad \mathfrak{U}' = \frac{\mathfrak{R}'}{2N^3\sqrt{\mathfrak{R}}}\{-\alpha^3 Q_3(\gamma,\delta)(Y\sqrt{\mathfrak{R}'} - Y'\sqrt{\mathfrak{R}})^3 + \gamma^3 Q_3(\alpha,\beta)(Y\sqrt{\mathfrak{R}'} + Y'\sqrt{\mathfrak{R}}$$

Benutzen wir die Gleichungen VIII, (7), (8) $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$, $\frac{\delta}{\gamma} = \mu$, $\alpha\gamma = N$, so folgt

$$(8)\quad \mathfrak{U} = \frac{\mathfrak{R}}{2\sqrt{\mathfrak{R}'}}\{Q_3(1,\lambda)(Y\sqrt{\mathfrak{R}'} + Y'\sqrt{\mathfrak{R}})^3 + Q_3(1,\mu)(Y\sqrt{\mathfrak{R}'} - Y'\sqrt{\mathfrak{R}})^3\}$$

$$(9)\quad \mathfrak{U}' = \frac{\mathfrak{R}'}{2\sqrt{\mathfrak{R}}}\{Q_3(1,\lambda)(Y\sqrt{\mathfrak{R}'} + Y'\sqrt{\mathfrak{R}})^3 - Q_3(1,\mu)(Y\sqrt{\mathfrak{R}'} - Y'\sqrt{\mathfrak{R}})^3\}$$

Aus (6), (7) folgt noch

$$(10)\quad N^3(\mathfrak{U}\mathfrak{R}'\sqrt{\mathfrak{R}'} + \mathfrak{U}'\mathfrak{R}\sqrt{\mathfrak{R}}) = \mathfrak{R}\mathfrak{R}'\gamma^3 Q_3(\alpha,\beta)(Y\sqrt{\mathfrak{R}'} + Y'\sqrt{\mathfrak{R}})^3,$$

$$(11)\quad N^3(\mathfrak{U}\mathfrak{R}'\sqrt{\mathfrak{R}'} - \mathfrak{U}'\mathfrak{R}\sqrt{\mathfrak{R}}) = \mathfrak{R}\mathfrak{R}'\alpha^3 Q_3(\gamma,\delta)(Y\sqrt{\mathfrak{R}'} - Y'\sqrt{\mathfrak{R}})^3$$

und hieraus

$$(12)\quad \begin{aligned} &N^6(\mathfrak{U}\mathfrak{R}'\sqrt{\mathfrak{R}'} + \mathfrak{U}'\mathfrak{R}\sqrt{\mathfrak{R}})(\mathfrak{U}\mathfrak{R}'\sqrt{\mathfrak{R}'} - \mathfrak{U}'\mathfrak{R}\sqrt{\mathfrak{R}}) \\ &= \mathfrak{R}^2\mathfrak{R}'^2\alpha^3\gamma^3 Q_3(\alpha,\beta)Q_3(\gamma,\delta)(Y\sqrt{\mathfrak{R}'} + Y'\sqrt{\mathfrak{R}})^3(Y\sqrt{\mathfrak{R}'} - Y' \end{aligned}$$

Es ist aber nach VIII, (7), (18)

$$\alpha\gamma = N, \quad Q_3(\alpha,\beta)\cdot Q_3(\gamma,\delta) = \mathfrak{S},$$

ferner nach V, (25)

$$(Y\sqrt{\mathfrak{R}'} + Y'\sqrt{\mathfrak{R}})(Y\sqrt{\mathfrak{R}'} - Y'\sqrt{\mathfrak{R}}) = N\mathfrak{J},$$

daß (12) übergeht in

$$\mathfrak{U}^2\mathfrak{R}'^3 - \mathfrak{U}'^2\mathfrak{R}^3 = \mathfrak{R}^2\mathfrak{R}'^2\mathfrak{S}\mathfrak{J}^3.$$

eraus folgt, daß $\mathfrak{U}$ durch $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{U}'$ durch $\mathfrak{R}'$ teilbar ist. Wir setzen

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{R}\mathfrak{U}_0, \quad \mathfrak{U}' = \mathfrak{R}'\mathfrak{U}_0.$$

nn ist

$$\mathfrak{U}_0^2\mathfrak{R}' - \mathfrak{U}_0'^2\mathfrak{R} = \mathfrak{S}\mathfrak{J}^3.$$

X. Ein Satz über die Invarianten der Differentialformen.

1. Die Formen.

Die Koeffizienten der Formen $Q_1, Q_{20}, Q_{30}, Q_{40}$ sind ganze rationale nogene Funktionen sowohl der $\mathfrak{A}_\alpha$ als auch der beiden ersten Ableitungen $\frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial v}$. Bezeichnen wir den Grad der Koeffizienten in den $\mathfrak{A}_\alpha$ der Reihe ch mit $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ und in den Ableitungen mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, so ist h V, (7), (9), (13), IV, (1), (3), VI, (1), (2) VIII, (30)

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3, \quad \lambda_4 = 3,$$
$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = n-2, \quad \mu_3 = n-3, \quad \mu_4 = 5n-11.$$

Die Formen Q_2, Q_3, Q_4 sind mit den Formen Q_{20}, Q_{30}, Q_{40} verbunden ch die Gleichungen

$$Q_{20} = \mathfrak{R}\mathfrak{D}Q_2, \quad Q_{40} = (n-1)^2\mathfrak{R}^3\mathfrak{D}^5 Q_4,$$
$$Q_{30} = \mathfrak{R}\mathfrak{D}Q_3 + 3\left\{\frac{\partial(\mathfrak{R}\mathfrak{D})}{\partial u}\xi + \frac{\partial(\mathfrak{R}\mathfrak{D})}{\partial v}\eta\right\}Q_2.$$

ner ist noch

$$Q_{40} = 4H(\mathfrak{A})Q_{30} - 3\left\{\xi\frac{\partial H}{\partial u} + \eta\frac{\partial H}{\partial v}\right\}Q_{20},$$

$$H(\mathfrak{A}) = |F_{kl}(\mathfrak{A})|.$$

2. Einführung neuer Veränderlicher.

Wir betrachten den Einfluß, den die Einführung neuer Veränderlicher $\bar{u}$ an Stelle von u, v auf die Formen $Q_1, Q_{20}, Q_{30}, Q_{40}$ ausübt. Wir zen zur Abkürzung

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & \partial \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{\partial} \end{pmatrix}$$

$$a\partial - bc = e, \qquad \bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c} = \bar{e} = e^{-1}.$$

Die beiden Systeme (5) sind zueinander reziprok. Die mit den neuen Veränderlichen gebildeten Größen unterscheiden wir von den entsprechenden mit den alten Veränderlichen gebildeten durch Überstreichen.

Zunächst wird

$$(7) \qquad \overline{\mathfrak{A}}_\alpha = \mathfrak{A}_\alpha, \quad \frac{\partial \overline{\mathfrak{A}}_\alpha}{\partial \bar{u}} = a\frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial u} + c\frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial v}, \quad \frac{\partial \overline{\mathfrak{A}}_\alpha}{\partial \bar{v}} = b\frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial u} + \partial\frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial v}$$

und hieraus nach I, (5)

$$\overline{\mathfrak{Z}}_k = \overline{\mathfrak{R}}\,\overline{\mathfrak{A}}'_k = (a\partial - bc)\,\mathfrak{Z}_k = e\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{A}'_k.$$

Wir setzen

$$(8) \qquad \overline{\mathfrak{R}} = e\mathfrak{R},$$

so daß

$$(9) \qquad \overline{\mathfrak{A}}'_\alpha = \mathfrak{A}'_\alpha.$$

Aus I, (9) folgt

$$F_k(\overline{\mathfrak{A}}) = \overline{\mathfrak{R}}\,\overline{\mathfrak{D}}\,\overline{\mathfrak{A}}'_k = F_k(\mathfrak{A}) = \mathfrak{R}\mathfrak{D}\mathfrak{A}'_k.$$

Daher wird wegen (8), (9)

$$(10) \qquad \overline{\mathfrak{R}}\,\overline{\mathfrak{D}} = \mathfrak{R}\mathfrak{D}, \quad \overline{\mathfrak{D}} = e^{-1}\mathfrak{D}.$$

Dual entsprechend wird

$$(11) \qquad \overline{\mathfrak{R}}'\,\overline{\mathfrak{D}}' = \mathfrak{R}'\mathfrak{D}', \quad \overline{\mathfrak{D}}' = e^{-1}\mathfrak{D}'.$$

Weiter ergibt sich

$$(12) \qquad \frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial u} = \bar{a}\frac{\partial \overline{\mathfrak{A}}_\alpha}{\partial \bar{u}} + \bar{c}\frac{\partial \overline{\mathfrak{A}}_\alpha}{\partial \bar{v}}, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial v} = \bar{b}\frac{\partial \overline{\mathfrak{A}}_\alpha}{\partial \bar{u}} + \bar{\partial}\frac{\partial \overline{\mathfrak{A}}_\alpha}{\partial \bar{v}}$$

und hieraus

$$\mathfrak{A}_\alpha + \xi\frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial u} + \eta\frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial v} = \overline{\mathfrak{A}}_\alpha + \bar{\xi}\frac{\partial \overline{\mathfrak{A}}_\alpha}{\partial \bar{u}} + \bar{\eta}\frac{\partial \overline{\mathfrak{A}}_\alpha}{\partial \bar{v}},$$

wenn wir setzen

$$(13) \qquad \xi = a\bar{\xi} + b\bar{\eta}, \quad \eta = c\bar{\xi} + \partial\bar{\eta}$$

oder

$$(14) \qquad \bar{\xi} = \bar{a}\xi + \bar{b}\eta, \quad \bar{\eta} = \bar{c}\xi + \bar{\partial}\eta.$$

Es stehen also ξ, η zu $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ in derselben Beziehung wie du, dv zu $d\bar{u}, d\bar{v}$. Hieraus folgt dann, daß für irgendeine Funktion $\mathfrak{P}(u, v) = \overline{\mathfrak{P}}(\bar{u}, \bar{v})$ die Gleichung gilt

$$(15) \qquad \xi\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial u} + \eta\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v} = \bar{\xi}\frac{\partial \overline{\mathfrak{P}}}{\partial \bar{u}} + \bar{\eta}\frac{\partial \overline{\mathfrak{P}}}{\partial \bar{v}}.$$

Wir setzen

$$(16) \qquad \begin{aligned} Q_1(\xi, \eta) &= \bar{Q}_1(\bar{\xi}, \bar{\eta}), \quad Q_{20}(\xi, \eta) = \bar{Q}_{20}(\bar{\xi}, \bar{\eta}), \\ Q_{30}(\xi, \eta) &= \bar{Q}_{30}(\bar{\xi}, \bar{\eta}), \quad Q_{40}(\xi, \eta) = \bar{Q}_{40}(\bar{\xi}, \bar{\eta}). \end{aligned}$$

ir betrachten die Formen der Reihe nach.

a) Q_1. Nach (12) und V, (7)

$$(\alpha\beta)_u = \bar{a}\overline{(\alpha\beta)}_u + \bar{c}\overline{(\alpha\beta)}_v, \quad (\alpha\beta)_v = \bar{b}\overline{(\alpha\beta)}_u + \bar{\partial}\overline{(\alpha\beta)}_v,$$

daß wegen V, (9)

$$X = \bar{a}\bar{X} + \bar{c}\bar{Y}, \quad Y = \bar{b}\bar{X} + \bar{d}\bar{Y}.$$

egen (13) folgt hieraus, da die Systeme (5) reziprok sind,

$$Q_1(\xi, \eta) = X\xi + Y\eta = \bar{X}\bar{\xi} + \bar{Y}\bar{\eta} = \bar{Q}_1(\bar{\xi}, \bar{\eta}).$$

b) Q_{20}, Q_{30}. Wenn wir setzen

$$F_k(\mathfrak{A}) = F_k(\bar{\mathfrak{A}}) = a_k$$

nd symbolisch

$$F_{kl}(\mathfrak{A}) = F_{kl}(\bar{\mathfrak{A}}) = a_k a_l, \quad F_{klm}(\mathfrak{A}) = F_{klm}(\bar{\mathfrak{A}}) = a_k a_l a_m,$$

können wir symbolisch nach IV, (1), (3) VI, (1), (2) schreiben

$$Q_{20}(\xi, \eta) = -\left\{\sum a_k \left(\xi \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial u} + \eta \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial v}\right)\right\}^2,$$

$$Q_{30}(\xi, \eta) = -\left\{\sum a_k \left(\xi \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial u} + \eta \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial v}\right)\right\}^3.$$

a aber nach (15)

$$\xi \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial u} + \eta \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial v} = \bar{\xi} \frac{\partial \bar{\mathfrak{A}}_k}{\partial \bar{u}} + \bar{\eta} \frac{\partial \bar{\mathfrak{A}}_k}{\partial \bar{v}},$$

folgt sofort

17) $$Q_{20}(\xi, \eta) = \bar{Q}_{20}(\bar{\xi}, \bar{\eta}), \quad Q_{30}(\xi, \eta) = \bar{Q}_{30}(\bar{\xi}, \bar{\eta}).$$

c) Q_{40}. Aus (3) ergibt sich wegen (15) und (17) sofort

$$Q_{40}(\xi, \eta) = \bar{Q}_{40}(\bar{\xi}, \bar{\eta}).$$

us den Gleichungen (2), (8), (10), (15) ergibt sich dann

18) $$Q_2(\xi, \eta) = \bar{Q}_2(\bar{\xi}, \bar{\eta}), \quad Q_3(\xi, \eta) = \bar{Q}_3(\bar{\xi}, \bar{\eta}), \quad Q_4(\xi, \eta) = e^{-2}\bar{Q}_4(\bar{\xi}, \bar{\eta}).$$

3. Die Transformation $\mathfrak{A}_k = \varrho \mathfrak{A}_k^*$.

Auf das Verhalten der Formen bei Einführung neuer Koordinaten ehe ich hier nicht ein, da wir es nicht brauchen. Wohl aber müssen ir die Wirkung der Transformation

19) $$\mathfrak{A}_k = \varrho \mathfrak{A}_k^*$$

etrachten, wo ϱ eine Funktion von u, v sein soll. Wir unterscheiden ie neuen Größen von den entsprechenden alten durch Hinzufügen eines terns.

Es wird

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial u} = \varrho \frac{\partial \mathfrak{A}_k^*}{\partial u} + \mathfrak{A}_k^* \frac{\partial \varrho}{\partial u}, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial v} = \varrho \frac{\partial \mathfrak{A}_k^*}{\partial v} + \mathfrak{A}_k^* \frac{\partial \varrho}{\partial v}. \tag{20}$$

Daher wird nach I, (5)

$$\mathfrak{Z}_k = \mathfrak{R} \mathfrak{A}_k' = \varrho^3 \mathfrak{Z}_k^* = \varrho^3 \mathfrak{R}^* \mathfrak{A}_k'^*.$$

Wir setzen

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^*, \tag{21}$$

so daß

$$\mathfrak{A}_k' = \varrho^3 \mathfrak{A}_k'^*. \tag{22}$$

An I, (9) folgt

$$F_k(\mathfrak{A}) = \mathfrak{R} \mathfrak{D} \mathfrak{A}_k' = \varrho^{n-1} F_k(\mathfrak{A}^*) = \varrho^{n-1} \mathfrak{R}^* \mathfrak{D}^* \mathfrak{A}_k'^*,$$

also wegen (21), (22)

$$\mathfrak{D} = \varrho^{n-4} \mathfrak{D}^*. \tag{23}$$

Wir betrachten nun die Wirkung der Transformation auf die einzelnen Formen.

a) Q_1. Nach (19) und (20) und V, (7) wird

$$(\alpha\beta)_u = \varrho^2 (\alpha\beta)_u^*, \quad (\alpha\beta)_v = \varrho^2 (\alpha\beta)_v^*$$

und daher wegen V, (9)

$$X = \varrho^2 X^*, \quad Y = \varrho^2 Y^* \tag{24}$$

und

$$Q_1(\xi, \eta) = \varrho^2 Q_1^*(\xi, \eta). \tag{25}$$

b) Q_{20}. Wir setzen symbolisch

$$F_{kl}(\mathfrak{A}) = b_k b_l, \quad F_{klm}(\mathfrak{A}) = c_k c_l c_m.$$

Es wird dann

$$Q_{20} = -\left\{\sum b_k \left(\xi \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial u} + \eta \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial v}\right)\right\}^2,$$

$$Q_{30} = -\left\{\sum c_k \left(\xi \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial u} + \eta \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial v}\right)\right\}^3.$$

Da ferner

$$F_{kl}(\mathfrak{A}) = \varrho^{n-2} F_{kl}(\mathfrak{A}^*) = \varrho^{n-2} b_k^* b_l^*,$$

$$F_{klm}(\mathfrak{A}) = \varrho^{n-3} F_{klm}(\mathfrak{A}^*) = \varrho^{n-3} c_k^* c_l^* c_m^*,$$

so haben wir zu setzen

$$b_k = \varrho^{\frac{n-2}{2}} b_k^*, \quad c_k = \varrho^{\frac{n-3}{3}} c_k^*.$$

wird dann

$$-Q_{20} = \varrho^{n-2}\left\{\varrho\sum b_k^*\left(\xi\frac{\partial \mathfrak{A}_k^*}{\partial u}+\eta\frac{\partial \mathfrak{A}_k^*}{\partial v}\right)+\left(\xi\frac{\partial \varrho}{\partial u}+\eta\frac{\partial \varrho}{\partial v}\right)\sum b_k^*\,\mathfrak{A}_k^*\right\}^2,$$

$$-Q_{30} = \varrho^{n-3}\left\{\varrho\sum c_k^*\left(\xi\frac{\partial \mathfrak{A}_k^*}{\partial u}+\eta\frac{\partial \mathfrak{A}_k^*}{\partial v}\right)+\left(\xi\frac{\partial \varrho}{\partial u}+\eta\frac{\partial \varrho}{\partial v}\right)\sum c_k^*\,\mathfrak{A}_k^*\right\}^3.$$

Wegen des Eulerschen Satzes über homogene Funktionen bestehen die Gleichungen

$$\sum F_{kl}(\mathfrak{A}^*)\,\mathfrak{A}_k^*\,\mathfrak{A}_l^* = \left\{\sum b_k^*\,\mathfrak{A}_k^*\right\}^2 = (n-1)\,n\,F(\mathfrak{A}^*)\equiv 0,$$

$$\sum F_{kl}(\mathfrak{A}^*)\,\mathfrak{A}_k^*\frac{\partial \mathfrak{A}_l^*}{\partial u} = \sum b_k^*\,\mathfrak{A}_k^*\cdot\sum b_l^*\frac{\partial \mathfrak{A}_l^*}{\partial u} = (n-1)\frac{\partial F(\mathfrak{A}^*)}{\partial u}\equiv 0,$$

$$\sum F_{kl}(\mathfrak{A}^*)\,\mathfrak{A}_k^*\frac{\partial \mathfrak{A}_l^*}{\partial v} = \sum b_k^*\,\mathfrak{A}_k^*\cdot\sum b_l^*\frac{\partial \mathfrak{A}_l^*}{\partial v} = (n-1)\frac{\partial F(\mathfrak{A}^*)}{\partial v}\equiv 0,$$

$$\sum F_{klm}(\mathfrak{A}^*)\,\mathfrak{A}_k^*\,\mathfrak{A}_l^*\,\mathfrak{A}_m^* = \left\{\sum c_k^*\,\mathfrak{A}_k^*\right\}^3 = n(n-1)(n-2)F(\mathfrak{A}^*)\equiv 0,$$

$$\sum F_{klm}(\mathfrak{A}^*)\,\mathfrak{A}_k^*\,\mathfrak{A}_l^*\frac{\partial \mathfrak{A}_m^*}{\partial u} = \left\{\sum c_k^*\,\mathfrak{A}_k^*\right\}^2\cdot\sum c_m^*\frac{\partial \mathfrak{A}_m^*}{\partial u}$$
$$= (n-1)(n-2)\frac{\partial F(\mathfrak{A}^*)}{\partial u}\equiv 0,$$

$$\sum F_{klm}(\mathfrak{A}^*)\,\mathfrak{A}_k^*\,\mathfrak{A}_l^*\frac{\partial \mathfrak{A}_m^*}{\partial v} = \left\{\sum c_k^*\,\mathfrak{A}_k^*\right\}^2\cdot\sum c_m^*\frac{\partial \mathfrak{A}_m^*}{\partial v}$$
$$= (n-1)(n-2)\frac{\partial F(\mathfrak{A}^*)}{\partial v}\equiv 0,$$

$$\sum F_{klm}(\mathfrak{A}^*)\,\mathfrak{A}_k^*\frac{\partial \mathfrak{A}_l^*}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{A}_m^*}{\partial u} = \sum c_k^*\,\mathfrak{A}_k^*\cdot\left\{\sum c_l^*\frac{\partial \mathfrak{A}_l^*}{\partial u}\right\}^2$$
$$= (n-2)\sum F_{lm}(\mathfrak{A}^*)\frac{\partial \mathfrak{A}_l^*}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{A}_m^*}{\partial u} = -(n-2)\,L_0^*,$$

$$\sum F_{klm}(\mathfrak{A}^*)\,\mathfrak{A}_k^*\frac{\partial \mathfrak{A}_l^*}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{A}_m^*}{\partial v} = \sum c_k^*\,\mathfrak{A}_k^*\cdot\sum c_l^*\frac{\partial \mathfrak{A}_l^*}{\partial u}\cdot\sum c_m^*\frac{\partial \mathfrak{A}_m^*}{\partial v}$$
$$= (n-2)\sum F_{lm}(\mathfrak{A}^*)\frac{\partial \mathfrak{A}_l^*}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{A}_m^*}{\partial v} = -(n-2)\,M_0^*,$$

$$\sum F_{klm}(\mathfrak{A}^*)\,\mathfrak{A}_k^*\frac{\partial \mathfrak{A}_l^*}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{A}_m^*}{\partial v} = \sum c_k^*\,\mathfrak{A}_k^*\cdot\left\{\sum c_l^*\frac{\partial \mathfrak{A}_l^*}{\partial v}\right\}^2$$
$$= (n-2)\sum F_{lm}(\mathfrak{A}^*)\frac{\partial \mathfrak{A}_l^*}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{A}_m^*}{\partial v} = -(n-2)\,N_0^*.$$

Aus (26), (27) ergibt sich daher

$$Q_{20}(\xi,\eta) = \varrho^{n}\,Q_{20}^*(\xi,\eta),$$

$$Q_{30}(\xi,\eta) = \varrho^{n}Q_{30}^*(\xi,\eta) + 3(n-2)\varrho^{n-1}\left(\xi\frac{\partial \varrho}{\partial u}+\eta\frac{\partial \varrho}{\partial v}\right)Q_{20}^*(\xi,\eta).$$

c) Q_{40}. Da $H(\mathfrak{A}) = |F_{kl}(\mathfrak{A})|$ vom Grade $4(n-2)$ in den $\mathfrak{A}_\alpha$ ist, ist

$$H = H(\mathfrak{A}) = \varrho^{4(n-2)}\,H(\mathfrak{A}^*) = \varrho^{4(n-2)}\,H^*,$$

woraus folgt

$$\xi\frac{\partial H}{\partial u}+\eta\frac{\partial H}{\partial v}=\varrho^{4(n-2)}\left\{\xi\frac{\partial H^*}{\partial u}+\eta\frac{\partial H^*}{\partial u}\right\}+4(n-2)\varrho^{4n-9}H^*\left\{\xi\frac{\partial\varrho}{\partial u}+\eta\frac{\partial\varrho}{\partial v}\right\}.$$

Aus (3) folgt daher in Verbindung mit (28) und (29)

$$\begin{aligned}Q_{40}&=4\varrho^{4n-8}H^*\left\{\varrho^n Q_{30}^*+3(n-2)\varrho^{n-1}\left(\xi\frac{\partial\varrho}{\partial u}+\eta\frac{\partial\varrho}{\partial v}\right)Q_{20}^*\right\}\\&\quad-3\left\{\varrho^{4n-8}\left(\xi\frac{\partial H^*}{\partial u}+\eta\frac{\partial H^*}{\partial v}\right)+4(n-2)\varrho^{4n-9}H^*\left(\xi\frac{\partial\varrho}{\partial u}+\eta\frac{\partial\varrho}{\partial v}\right)\right\}\varrho^n Q_{20}^*\\&=\varrho^{5n-8}\left\{4H^*Q_{30}^*-3\left(\xi\frac{\partial H^*}{\partial u}+\eta\frac{\partial H^*}{\partial v}\right)Q_{20}^*\right\},\end{aligned}$$

also

$$Q_{40}(\xi,\eta)=\varrho^{5n-8}Q_{40}^*(\xi,\eta). \tag{30}$$

Aus (2), (21), (23) ergibt sich dann das Verhalten von Q_2, Q_3, Q_4 bei unserer Transformation. Wir gehen darauf nicht weiter ein.

4. Der Beweis des Satzes über die Invarianten.

Es sei

$$\mathfrak{J}=\mathfrak{J}(X,Y;L,M,N;A,B,C,D;\mathsf{A},\mathsf{B},\Gamma,\Delta) \tag{31}$$

eine Invariante der vier Formen Q_k. Wegen der Formeln (2), (29) nehmen wir an, daß $\mathfrak{J}$ sich nicht ändert, wenn man Q_3 ersetzt durch

$$Q_3+(a\xi+b\eta)Q_2,$$

wo a, b beliebige Größen sind. Es ist $\mathfrak{J}$ homogen in den Koeffizienten der Formen Q_k und es sei $\mathfrak{J}$ vom Grade α_k in den Koeffizienten von Q_k. Wir führen eine Reihe von Transformationen aus.

1. Wir setzen

$$\mathfrak{J}_0=\mathfrak{J}(X,Y;L_0,M_0,N_0;A_0,B_0,C_0,D_0;\mathsf{A}_0,\mathsf{B}_0,\Gamma_0,\Delta_0).$$

Wegen der zwischen den Formen Q_2, Q_3, Q_4 und Q_{20}, Q_{30}, Q_{40} bestehenden Gleichungen (2) wird

$$\mathfrak{J}_0=(n-1)^{2\alpha_4}\mathfrak{R}^{\sigma_1}\mathfrak{D}^{\sigma_2}\mathfrak{J}, \tag{32}$$

wo

$$\sigma_1=\alpha_2+\alpha_3+3\alpha_4,\qquad \sigma_2=\alpha_2+\alpha_3+5\alpha_4. \tag{33}$$

2. Wir führen neue Veränderliche $\bar u$, $\bar v$ ein, die wir erst später spezialisieren, und bezeichnen die in den neuen Veränderlichen, aber sonst genau wie $\mathfrak{J}_0$ gebildete Funktion mit $\overline{\mathfrak{J}}$. Es wird wegen der Invarianteneigenschaft von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}_0$

$$\mathfrak{J}_0=\left\{\frac{\partial\bar u}{\partial u}\frac{\partial\bar v}{\partial v}-\frac{\partial\bar u}{\partial v}\frac{\partial\bar v}{\partial u}\right\}^{\sigma_2}\overline{\mathfrak{J}}; \tag{34}$$

nach den Regeln der Invariantentheorie

$$\sigma_3 = \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 3\alpha_4).$$

3. Wir führen die Transformation aus $\mathfrak{A}_k = \varrho\,\mathfrak{A}_k^*$, und zwar wählen im besonderen $\varrho = \mathfrak{A}_4$, so daß

$$\mathfrak{A}_4^* = 1, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}_4^*}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial \mathfrak{A}_4^*}{\partial \bar{v}} = 0.$$

Die mit den Größen $\mathfrak{A}_k^*$ statt $\mathfrak{A}_k$ gebildete Funktion $\bar{\mathfrak{J}}$ bezeichnen mit $\mathfrak{J}^*$. Infolge des im vorigen Paragraphen hergeleiteten Verhaltens Formen Q_1, Q_{20}, Q_{30}, Q_{40} gegenüber dieser Transformation wird

$$\bar{\mathfrak{J}} = \varrho^{\sigma_4}\mathfrak{J}^* = \mathfrak{A}_4^{\sigma_4}\mathfrak{J}^*,$$

$$\sigma_4 = 2\alpha_1 + n\alpha_2 + n\alpha_3 + (5n-8)\alpha_4.$$

Die Koeffizienten der Formen Q_1, Q_{20}, Q_{30}, Q_{40} sind ganze rationale nogene Funktionen der Differentialquotienten $\frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial v}$ und auch der $\mathfrak{A}_\alpha$. Grade λ_k, μ_k dieser Funktionen sind oben angegeben, Formel (1). Es daher $\mathfrak{J}_0$ homogen in den Differentialquotienten vom Grade

$$\sigma_5 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 3\alpha_4 = 2\sigma_3$$

in den $\mathfrak{A}_\alpha$ homogen vom Grade

$$\sigma_6 = \alpha_1 + (n-2)\alpha_2 + (n-3)\alpha_3 + (5n-11)\alpha_4 = \sigma_4 - 2\sigma_3.$$

gen (36) ist daher $\mathfrak{J}^*$ eine ganze rationale homogene Funktion vom de σ_5 der Differentialquotienten

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha^*}{\partial \bar{u}}, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha^*}{\partial \bar{v}} \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

eine ganze rationale Funktion der Größen $\mathfrak{A}_1^*$, $\mathfrak{A}_2^*$, $\mathfrak{A}_3^*$ vom Grade σ_6. Da

$$F(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4) = \mathfrak{A}_4^n F(\mathfrak{A}_1^*, \mathfrak{A}_2^*, \mathfrak{A}_3^*, 1) = 0,$$

st

$$\begin{cases} F_3(\mathfrak{A}^*)\frac{\partial \mathfrak{A}_3^*}{\partial \bar{u}} = -F_1(\mathfrak{A}^*)\frac{\partial \mathfrak{A}_1^*}{\partial \bar{u}} - F_2(\mathfrak{A}^*)\frac{\partial \mathfrak{A}_2^*}{\partial \bar{u}}, \\ F_3(\mathfrak{A}^*)\frac{\partial \mathfrak{A}_3^*}{\partial \bar{v}} = -F_1(\mathfrak{A}^*)\frac{\partial \mathfrak{A}_1^*}{\partial \bar{v}} - F_2(\mathfrak{A}^*)\frac{\partial \mathfrak{A}_2^*}{\partial \bar{v}}. \end{cases}$$

tiplizieren wir daher $\mathfrak{J}^*$ mit $\{F_3(\mathfrak{A}^*)\}^{\sigma_5}$ und eliminieren dann $\frac{\partial \mathfrak{A}_3^*}{\partial \bar{u}}$, $\frac{\partial \mathfrak{A}_3^*}{\partial \bar{v}}$ Hilfe von (41), so erhalten wir eine Gleichung der Form

$$\{F_3(\mathfrak{A}^*)\}^{\sigma_5}\mathfrak{J}^* = G_1\left(\mathfrak{A}_1^*, \mathfrak{A}_2^*, \mathfrak{A}_3^*; \frac{\partial \mathfrak{A}_1^*}{\partial \bar{u}}, \frac{\partial \mathfrak{A}_1^*}{\partial \bar{v}}, \frac{\partial \mathfrak{A}_2^*}{\partial \bar{u}}, \frac{\partial \mathfrak{A}_2^*}{\partial \bar{v}}\right),$$

G_1 eine ganze rationale Funktion von $\mathfrak{A}_1^*$, $\mathfrak{A}_2^*$, $\mathfrak{A}_3^*$ vom Grade

$$g = \sigma_6 + (n-1)\,\sigma_5 \tag{43}$$

ist.

Wir wählen jetzt im besonderen

$$\bar{u} = \mathfrak{A}_1^*, \quad \bar{v} = \mathfrak{A}_2^*,$$

so daß

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_1^*}{\partial \bar{u}} = 1, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}_1^*}{\partial \bar{v}} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}_2^*}{\partial \bar{u}} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}_2^*}{\partial \bar{v}} = 1, \tag{44}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial v} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_4}\right)\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_4}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_4}\right)\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_4}\right) \\ &= \mathfrak{A}_4^{-3}\,\mathfrak{Z}_3 = \mathfrak{A}_4^{-3}\,\mathfrak{D}^{-1} F_3(\mathfrak{A}). \end{aligned} \tag{45}$$

Da $F_3(\mathfrak{A}^*) = \mathfrak{A}_4^{1-n} F_3(\mathfrak{A})$, so haben wir nach (42) und (44)

$$\{F_3(\mathfrak{A})\}^{\sigma_5}\,\mathfrak{J}^* = \mathfrak{A}_4^{(n-1)\sigma_5} G_2(\mathfrak{A}_1^*, \mathfrak{A}_2^*, \mathfrak{A}_3^*),$$

wo G_2 eine ganze rationale Funktion vom Grade g ist. Es folgt weiter

$$\{F_3(\mathfrak{A})\}^{\sigma_5}\,\mathfrak{J}^* = \mathfrak{A}_4^{(n-1)\sigma_5 - g} G(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4), \tag{46}$$

wo G eine ganze rationale *homogene* Funktion vom Grade g ist.

Fassen wir die Ergebnisse der einzelnen Transformationen, wie sie in den Formeln (32), (34), (37), (45), (46) gegeben sind, zusammen, so erhalten wir

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{R}^{-\sigma_1}\,\mathfrak{D}^{-\sigma_2-\sigma_3}\,\frac{G(\mathfrak{A})}{(n-1)^{2\alpha_4}\{F_3(\mathfrak{A})\}^{\sigma_5-\sigma_3}\,\mathfrak{A}_4^{g+3\sigma_3-\sigma_4-(n-1)\sigma_5}}. \tag{47}$$

Es hängt aber $\mathfrak{J}$ symmetrisch von den vier Größen $\mathfrak{A}_\alpha$ ab; $\mathfrak{A}_4$ und F können nicht ausgezeichnet sein. Daher muß in (47) $G(\mathfrak{A})$ durch den Nenner teilbar sein und wir erhalten

$$\mathfrak{R}^{\sigma_1}\,\mathfrak{D}^{\sigma_2+\sigma_3}\,\mathfrak{J} = H(\mathfrak{A}), \tag{48}$$

wo $H(\mathfrak{A})$ eine ganze rationale homogene Funktion der $\mathfrak{A}_\alpha$ ist vom Grade

$$h = g - (n-1)(\sigma_5 - \sigma_3) - g - 3\sigma_3 + \sigma_4 + (n-1)\sigma_5 = (n-4)\sigma_3 + \sigma_4, \tag{49}$$

Wir hatten angenommen, daß $\mathfrak{J}$ von den Koeffizienten der Formen Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 abhängt. Wir wollen jetzt zulassen, daß $\mathfrak{J}$ auch von den Koeffizienten der Formen $Q_1' = X'\xi + Y'\eta$ abhängt, und zwar sei $\mathfrak{J}$ in diesen Koeffizienten vom Grade α'. Da nach V, (17)

$$\mathfrak{R}X' = -MX + LY, \quad \mathfrak{R}Y' = -NX + MY,$$

so können wir X', Y' eliminieren und erhalten

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{R}^{-\alpha'}\,\mathfrak{J}_1,$$

und es ist $\mathfrak{J}_1$ eine Invariante, die nur noch von den Koeffizienten der Formen Q_k abhängt, auf die wir also unseren Satz anwenden können. Dabei haben wir α_1, α_2 zu ersetzen durch $\alpha' + \alpha_1$, $\alpha' + \alpha_2$.

So erhalten wir folgenden Satz, zu dem wir gleich den dual entechenden hinzufügen.

Es sei $\mathfrak{J}$ eine Invariante der fünf Formen Q_1', Q_2, Q_3, Q_4. Sie sei e ganze rationale homogene Funktion der Koeffizienten einer jeden der rmen, und zwar der Reihe nach vom Grade

$$\alpha', \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4.$$

bleibe ferner ungeändert, wenn man Q_3 ersetzt durch $Q_3 + (a\xi + b\eta)Q_2$, a, b beliebige Größen sind.

Setzen wir

$$\varrho = 2\alpha' + \alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4, \quad \varrho' = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4$$
$$\sigma = \tfrac{1}{2}(\alpha' + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 7\alpha_4),$$
$$\tau = \varrho + \sigma, \quad \tau' = \varrho' + \sigma,$$
$$h = (n-1)\varrho + (n-4)\sigma + \varrho', \quad h' = (n'-1)\varrho' + (n'-4)\sigma + \varrho,$$

bestehen Gleichungen von der Form

$$\mathfrak{R}^{\varrho}\mathfrak{D}^{\tau}\mathfrak{J} = H(\mathfrak{A}), \quad \mathfrak{R}'^{\varrho'}\mathfrak{D}'^{\tau'}\mathfrak{J} = H'(\mathfrak{A}'),$$

$H(\mathfrak{A})$ und $H'(\mathfrak{A}')$ ganze rationale Funktionen sind, und zwar $H(\mathfrak{A})$ $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4$ vom Grade h und $H'(\mathfrak{A}')$ von $\mathfrak{A}_1', \mathfrak{A}_2', \mathfrak{A}_3', \mathfrak{A}_4'$ vom de h'. Hieraus folgen die Äquivalenzen

$$\mathfrak{R}^{\varrho}\mathfrak{D}^{\tau}\mathfrak{J} \sim \mathfrak{A}^{h}, \quad \mathfrak{R}'^{\varrho'}\mathfrak{D}'^{\tau'} \sim \mathfrak{A}'^{h'}.$$

geometrischer Form haben wir:

Die Kurve, längs der eine Differentialinvariante null wird, ist zumen mit passenden Potenzen der Rückkehrkurve und der mehrfachen rve der vollständige Schnitt von F mit einer anderen algebraischen che, oder zusammen mit einer passenden Potenz der parabolischen rve und der Kurve der mehrfachen Berührungsebenen die vollständige ührungskurve der F und eine andere algebraische Fläche gleichzeitig ihrenden Ebenen.

Es sei noch eine Bemerkung hinzugefügt:

Die Formen Q_1 und Q_1' hängen von Parametern, nämlich den ckerschen Koordinaten p_{kl} einer Geraden g ab. Es seien r Gerade g_λ ndwie gewählt, und es seien $p_{kl}^{(\lambda)}$ die Koordinaten von g_λ. Die mit $p_{kl}^{(\lambda)}$ gebildeten Größen X, Y, X', Y' seien bezeichnet mit $X_\lambda, Y_\lambda, X_\lambda', Y_\lambda'$. Äquivalenzsatz gilt auch, wenn wir annehmen, daß die Invariante statt Y, X', Y' die Größen $X_\lambda, Y_\lambda, X_\lambda', Y_\lambda'$ enthält. Nur muß $\mathfrak{J}$ eine homogene ktion eines jeden der Paare X_λ, Y_λ; X_λ', Y_λ' sein und es muß $\mathfrak{J}$ in ıg auf die $2r$ Größen X_λ, Y_λ vom Grade α_1 und in bezug auf die Größen X_λ', Y_λ' vom Grade α' sein.

XI. Die Invarianten.

1. Die Invarianten.

Wir stellen zunächst die Invarianten zusammen, auf die wir den in vorigen Kapitel bewiesenen Satz anwenden wollen.

1. Die Resultante von $Q_1(\xi, \eta)$ und $Q_1'(\xi, \eta)$ ist

$$\mathfrak{J} = XY' - YX'.$$

2. Die Resultante von $Q_2(\xi, \eta)$ und $Q_1(\xi, \eta)$ und die von $Q_2(\xi, \eta)$ und $Q_1'(\xi, \eta)$. Diese sind unter Benutzung von V, (22), (23)

$$LY^2 - 2MYX + NX^2 = -\mathfrak{R}\mathfrak{J},$$
$$LY'^2 - 2MY'X' + NX'^2 = -\mathfrak{R}'\mathfrak{J}.$$

3. Die Diskriminante von $Q_2(\xi, \eta)$ ist nach IV, (18)

$$M^2 - LN = \mathfrak{R}\mathfrak{R}'.$$

4. Die Resultante von $Q_2(\xi, \eta)$ und $Q_3(\xi, \eta)$ ist die oben definierte Kurve $\mathfrak{S}$.

5. Die Resultante von $Q_2(\xi, \eta)$ und $Q_4(\xi, \eta)$ ist $\mathfrak{R}^2\mathfrak{R}'^2\mathfrak{S}$, wie sich aus der zwischen Q_3 und Q_4 bestehenden Gleichung VIII, (34) ergibt.

6. Die Diskriminante von $Q_4(\xi, \eta)$ ergibt sich zu $4\mathfrak{R}\mathfrak{R}'\mathfrak{S}^2$, am einfachsten dadurch, daß man die Darstellung VIII, (47) von Q_4 benutzt.

7. Die Resultante von $Q_1(\xi, \eta)$ und $Q_4(\xi, \eta)$ ist $\mathfrak{U}$ und die von $Q_1'(\xi, \eta)$ und $Q_4(\xi, \eta)$ ist $\mathfrak{U}'$.

8. Die Resultante der für zwei Gerade g_1, g_2 gebildeten Formen $Q_1^{(1)}(\xi, \eta)$, $Q_1^{(2)}(\xi, \eta)$ ist

$$X_1Y_2 - X_2Y_1 = \mathfrak{R}\mathfrak{G}$$

und die Resultante der für g_1, g_2 gebildeten Formen $Q_1'^{(1)}(\xi', \eta')$, $Q_2'^{(2)}(\xi', \eta')$ ist

$$X_1'Y_2' - X_2'Y_1' = -\mathfrak{R}'\mathfrak{G}.$$

Außer den hier benutzten Formen könnten wir noch weitere bilden. Zunächst könnten wir noch die Form $P_4(\xi, \eta)$, die im wesentlichen die kubische Kovariante von Q_4 ist, benutzen. Diese würde aber nichts Neues liefern. Ihre Diskriminante ist gleich der von Q_4 und die Resultante von Q_1, P_4 ist gleich der von Q_1', Q_4, die von Q_2, P_4 gleich der von Q_2 und Q_4. Die quadratische Kovariante von Q_4 und ebenso die von P_4 ist im wesentlichen, wie wir oben sahen, gleich Q_2.

Wir bekommen aber eine neue Form, wenn wir die Funktionaldeterminante von Q_1 und Q_4 bilden. Von dieser weiß ich aber keine einfache geometrische Deutung. Ich sehe daher hier von ihr ab.

Es sei noch bemerkt, daß die Form Q_3 nach X, (29) keine Kovariante die Transformation $\mathfrak{A}_\alpha = \varrho\,\mathfrak{A}_\alpha^*$ ist, daß wir sie daher zur Bildung neuer varianten nicht verwenden können.

2. Die Äquivalenzen.

Wenden wir den Äquivalenzsatz des vorigen Kapitels an, so erhalten folgende Äquivalenzen, zu denen die Äquivalenz I, (10) und die ihr l entsprechende hinzugefügt sind

$$\begin{aligned}
&\text{(I)}\quad \mathfrak{R}\mathfrak{D}\mathfrak{A}' \sim \mathfrak{A}^{n-1}, && \text{(I')}\quad \mathfrak{R}'\mathfrak{D}'\mathfrak{A} \sim \mathfrak{A}'^{n'-1},\\
&\text{(II)}\quad \mathfrak{R}^3\mathfrak{R}'\mathfrak{D}^4 \sim \mathfrak{A}^{4n-8}, && \text{(II')}\quad \mathfrak{R}'^3\mathfrak{R}\mathfrak{D}'^4 \sim \mathfrak{A}'^{4n'-8},\\
&\text{(III)}\quad \mathfrak{R}^2\mathfrak{D}^3\mathfrak{J} \sim \mathfrak{A}^{3n-4}, && \text{(III')}\quad \mathfrak{R}'^2\mathfrak{D}'^3\mathfrak{J} \sim \mathfrak{A}'^{3n'-4},\\
&\text{(IV)}\quad \mathfrak{R}^5\mathfrak{D}^{11}\mathfrak{S} \sim \mathfrak{A}^{11n-24}, && \text{(IV')}\quad \mathfrak{R}'^5\mathfrak{D}'^{11}\mathfrak{S} \sim \mathfrak{A}'^{11n'-24},\\
&\text{(V)}\quad \mathfrak{R}^3\mathfrak{D}^8\mathfrak{U} \sim \mathfrak{A}^{8n-14}, && \text{(V')}\quad \mathfrak{R}'^3\mathfrak{D}'^8\mathfrak{U}' \sim \mathfrak{A}'^{8n'-14},\\
&\text{(VI)}\quad \mathfrak{R}^9\mathfrak{D}^{14}\mathfrak{U}' \sim \mathfrak{A}^{11n-26}, && \text{(VI')}\quad \mathfrak{R}'^9\mathfrak{D}'^{14}\mathfrak{U} \sim \mathfrak{A}'^{11n'-26}.
\end{aligned}$$

$$\text{(VII)}\quad \mathfrak{G} \sim \mathfrak{A}\mathfrak{A}'.$$

n diesen Äquivalenzen sind 8 unabhängig, z. B. (I), (I'), (II), (III), '), (V), (V'), (VII).

Kiel, November 1919.

(Eingegangen am 18. November 1919.)

Über Potenzreihen, die im Einheitskreise beschränkte Funktionen darstellen.

Von

Otto Szász in Frankfurt a. M.

Herrn Geheimrat Prof. Dr. Alfred Pringsheim zu seinem 70. Geburtstage gewidmet.

Einleitung.

Herr Carleman hat zuerst gezeigt[1]), daß es stetige Funktionen $f(x)$ gibt, mit der Eigenschaft, daß die unendliche Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(|a_\nu|^{2-\delta}+|b_\nu|^{2-\delta}),$$

wobei a_ν, b_ν die Fourierschen Koeffizienten

$$a_\nu=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos \nu x\,dx, \qquad b_\nu=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin \nu x\,dx$$

bedeuten, für jedes $\delta>0$ divergiert. Zu diesem Zweck gab er eine stetige Funktion

$$F(x)\sim A_1\cos x+A_2\cos 2x+A_3\cos 3x+\ldots$$

an, für die

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\frac{\log^2\nu}{\sqrt{\nu}}(|A_1|+|A_2|+\ldots+A_\nu|)\geqq\frac{1}{2} \tag{1}$$

ist. Hieraus ergibt sich leicht, daß die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|A_\nu|^{2-\delta}=|A_1|^{2-\delta}+|A_2|^{2-\delta}+|A_3|^{2-\delta}+\ldots$$

[1]) Man vgl. Torsten Carleman, Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion, Acta mathematica. **41** (1918), S. 377–389.

jedes $\delta > 0$ divergiert; in leicht verständlicher Ausdrucksweise: die
ie $\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$ besitzt den Konvergenzexponenten zwei[2]).

Man kann nun diese Betrachtung auf Potenzreihen übertragen und
ngt zu gewissen Fragen, die sich auf „beschränkte Potenzreihen"
ehen. Allgemein gesagt, handelt es sich darum, für Potenzreihen
$) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$, die im Einheitskreise $|z| < 1$ konvergieren und daselbst
Bedingung $|P(z)| \leqq 1$ genügen, gewisse aus den Koeffizienten gebildete
drücke möglichst gut abzuschätzen. Hier ist die Frage von Interesse:
Was ist die obere Grenze der endlichen Summe

$$|c_0| + |c_1| + \ldots + |c_n| = \sigma_n$$

festem n für alle hier betrachteten Potenzreihen, und welcher Art ist
infinitäre Verhalten von σ_n für eine einzelne Potenzreihe $P(z)$? Es sei

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu \quad \text{und} \quad \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu \right| \leqq 1 \quad \text{für } |z| < 1,$$

wollen dann kurz sagen, daß $P(z)$ zur Klasse (E) gehört; es ist leicht
eigen, daß dann stets die Ungleichung

$$|c_0| + |c_1| + \ldots + |c_n| \leqq \sqrt{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

Bezeichnet man die obere Grenze der σ_n mit Γ_n, so ist demnach

$$\Gamma_n \leqq \sqrt{n+1}, \quad \text{oder} \quad \log \Gamma_n \leqq \tfrac{1}{2} \log (n+1) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

Carleman [a. a. O. [1]), S. 384] hat gezeigt, daß

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log \Gamma_n}{\log n} = \frac{1}{2}$$

im folgenden wird sich die schärfere Abschätzung ergeben:

$$\frac{1}{2} \leqq \underline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\Gamma_n}{\sqrt{n}} \leqq \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\Gamma_n}{\sqrt{n}} \leqq 1.$$

Die Grundlage der Carlemanschen Betrachtung bilden gewisse von
n S. Bernstein eingeführte und für ähnliche Zwecke verwendete
nometrische Polynome. Mit Hilfe dieser Polynome zeige ich zunächst,
für jede Primzahl p

$$\Gamma'_{p-2} \geqq \frac{1}{2} \frac{p-1}{\sqrt{p}}$$

[2]) Die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} |A_\nu|^2$ ist bekanntlich konvergent, sogar schon dann, wenn
unktion $F(x)$ samt ihrem Quadrate im Lebesgueschen Sinne integrierbar ist.

ist; es ist dann leicht mit Hilfe des Primzahlsatzes $\frac{p_{\nu+1}}{p_\nu} \to 1$ ($p_1, p_2, \ldots$ sind die aufeinanderfolgenden Primzahlen) die Relation

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\Gamma_n}{\sqrt{n}} \geqq \frac{1}{2}$$

zu beweisen (§ 1).

Für jede zur Klasse (E) gehörende Potenzreihe folgt leicht aus einem Hardyschen Satz, daß $\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}} = 0$ ist. Mit Verwendung der S. Bernsteinschen Polynome läßt sich nun zeigen, daß diese Relation nicht verschärft werden kann; wir geben nämlich in § 2 zu jeder mit n unbegrenzt wachsenden Zahlenfolge α_n eine zur Klasse (E) gehörige Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ an von der Art, daß

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}} \sum_{\nu=0}^{n} |c_\nu| = \infty$$

ist. Die Konstruktion dieser Potenzreihen ist der Methode nachgebildet, die Herr Fejér[3]) verwendet hat, um Potenzreihen herzustellen, die im abgeschlossenen Einheitskreise stetige Funktionen darstellen, aber auf dem Einheitskreise nicht überall konvergieren.

Auf diesem Wege ergeben sich in § 3 — soviel ich weiß zum erstenmal — Potenzreihen $\sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu z^\nu$, die für $|z| \leqq 1$ gleichmäßig konvergieren und den Konvergenzexponenten zwei besitzen, das heißt: $\sum_{\nu=0}^{\infty} |\gamma_\nu|^{2-\delta}$ divergiert für jedes $\delta > 0$. Insbesondere sind diese Potenzreihen für $|z| = 1$ nur bedingt konvergent. Sogar die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-\varkappa} |\gamma_\nu|^{2-\delta}$ wird für jedes $0 < \delta \leqq 1$ und $\varkappa < \frac{\delta}{2}$ divergent, während für $\varkappa = \frac{\delta}{2}$ die Frage unentschieden bleibt.

§ 1.

Über die Summe $|c_1| + |c_2| + \ldots + |c_n|$.

Herr S. Bernstein hat den Satz bewiesen: Es sei p eine ungerade Primzahl und $\left(\frac{\nu}{p}\right)$ das zahlentheoretische Symbol von Legendre $\left[\left(\frac{\nu}{p}\right) = +1\right.$

[3]) Vgl. L. Fejér, Über Potenzreihen, deren Summe im abgeschlossenen Konvergenzkreise überall stetig ist, Sitzungsberichte d. Bayerischen Akademie d. Wissenschaften, Mathem.-phys. Klasse, Jahrg. 1917, S. 33—50.

$r = -1$, je nachdem ν für den Modul p quadratischer Rest ist oder
t; $0 < \nu < p$]. Dann hat das trigonometrische Polynom

$$f_p(x) = \begin{cases} \frac{2}{p^{\frac{3}{2}}} \sum_{\nu=1}^{p-1} (p-\nu)\left(\frac{\nu}{p}\right) \cos \nu x = \sum_{\nu=1}^{p-1} a_\nu^{(p)} \cos \nu x & \text{für } p \equiv 1 \pmod 4, \\ \frac{2}{p^{\frac{3}{2}}} \sum_{\nu=1}^{p-1} (p-\nu)\left(\frac{\nu}{p}\right) \sin \nu x = \sum_{\nu=1}^{p-1} a_\nu^{(p)} \sin \nu x & \text{für } p \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

ende Eigenschaften:

1) $|f_p(x)| \leqq 1$ für jedes x,

2) $\sum_{\nu=1}^{p-1} |a_\nu^{(p)}| = \frac{p-1}{\sqrt{p}}$ [4]).

Es bezeichne nun, wie schon in der Einleitung gesagt wurde, Γ_n die
nste Zahl von der Eigenschaft, daß aus

$$\left| \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu \right| \leqq 1 \qquad \text{für } |z| < 1$$

s

$$|c_0| + |c_1| + \ldots + |c_n| \leqq \Gamma_n$$

t.

Setzt man

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu = P(z),$$

ist offenbar

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(re^{\varphi i})|^2 d\varphi = \sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu|^2 r^{2\nu} \leqq 1 \qquad (0 < r < 1),$$

hieraus folgt

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 + \ldots + |c_n|^2 \leqq 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

---

[4]) Vgl. S. Bernstein, Sur la convergence absolue des séries trigonométriques, ptes rendus hebd. des séances de l'Acad. des Sciences, **158** (I, 1914), Paris, 361—1663. — Es gilt auch der allgemeinere Satz: Es sei k eine positive ganze > 2, $\chi(\nu)$ ein eigentlicher Charakter mod k; ferner sei

$$t_k(x) = \begin{cases} \frac{2}{k^{\frac{3}{2}}} \sum_{\nu=1}^{k-1} (k-\nu)\, \chi(\nu) \cos \nu x & \text{für } \chi(-1) = 1, \\ \frac{2}{k^{\frac{3}{2}}} \sum_{\nu=1}^{k-1} (k-\nu)\, \chi(\nu) \sin \nu x & \text{für } \chi(-1) = -1. \end{cases}$$

n ist für alle Werte von x

$$|t_k(x)| \leqq 1.$$

einfache Beweis wurde hier zwecks Raumersparnis unterdrückt.

Nun ist bekanntlich für positive a_ν, b_ν

$$\Big(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_\nu\Big)^2 \leqq \Big(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^2\Big)\Big(\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu^2\Big);$$

setzt man hierin

$$a_\nu = |c_\nu|, \qquad b_\nu = 1 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots n)$$

so erhält man mit Rücksicht auf (3)

$$\Big(\sum_{\nu=0}^{n} |c_\nu|\Big)^2 \leqq (n+1)\sum_{\nu=0}^{n} |c_\nu|^2 \leqq n+1,$$

oder

$$\sum_{\nu=0}^{n} |c_\nu| \leqq \sqrt{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Daher ist jedenfalls

$$\Gamma_n \leqq \sqrt{n+1}. \tag{4}$$

Andererseits ist nach dem oben angeführten Bernsteinschen Satz

$$\frac{1}{2}\Big|\sum_{\nu=1}^{p-1} a_\nu^{(p)}(e^{\nu x i} + e^{-\nu x i})\Big| \leqq 1$$

für alle x, und für jede Primzahl p, die $\equiv 1 \bmod 4$ ist; oder

$$\frac{1}{2}\Big|\sum_{\nu=1}^{p-1} a_\nu^{(p)}(e^{(p+\nu-1)x i} + e^{(p-\nu-1)x i})\Big| \leqq 1,$$

das heißt

$$\frac{1}{2}\big|a_{p-1}^{(p)} + a_{p-2}^{(p)} z + \ldots + a_1^{(p)} z^{p-2} + a_1^{(p)} z^p + a_2^{(p)} z^{p+1} + \ldots + a_{p-1}^{(p)} z^{2(p-1)}\big| \leqq$$

für $|z| \leqq 1$

Ferner ist

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{p-1} |a_\nu^{(p)}| = \frac{1}{2}\frac{p-1}{\sqrt{p}};$$

es ist also in diesem Fall

$$|c_0| + |c_1| + \ldots + |c_{p-2}| = \frac{1}{2}\frac{p-1}{\sqrt{p}},$$

somit

$$\Gamma_{p-2} \geqq \frac{1}{2}\frac{p-1}{\sqrt{p}},$$

wenn p eine Primzahl von der Form $4\mu + 1$ ist.

Jedenfalls ist also

$$\frac{1}{2} \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\Gamma_n}{\sqrt{n}} \leqq 1.$$

Ist die Primzahl p von der Form $4\mu+3$, so ist nach dem rnsteinschen Satz

$$\frac{1}{2}\left|\sum_{\nu=1}^{p-1} a_\nu^{(p)}\left(e^{\nu x i}-e^{-\nu x i}\right)\right| \leqq 1 \qquad \text{für alle } x,$$

l hieraus

$$\left|a_{p-1}^{(p)}+a_{p-2}^{(p)}z+\ldots+a_1^{(p)}z^{p-2}-a_1^{(p)}z^{p}-\ldots-a_{p-1}^{(p)}z^{2(p-1)}\right| \leqq 1,\ |z| \leqq 1,$$

l somit wiederum

$$|c_0|+|c_1|+\ldots+|c_{p-2}| = \frac{1}{2}\frac{p-1}{\sqrt{p}}.$$

ist also

$$\boxed{\Gamma_{p-2} \geqq \frac{1}{2}\frac{p-1}{\sqrt{p}}}$$

jede Primzahl p. Diese Abschätzung ist besser als die Carlemansche.

Man kann nun auch bei *beliebigem* n eine untere Schranke für Γ_n eben. Zunächst ist offenbar

$$\Gamma_{n+1} \geqq \Gamma_n \qquad (n=0,1,2,\ldots).$$

ner ist bekanntlich [5])

$$\Gamma_0 = 1, \qquad \Gamma_1 = \tfrac{5}{4},$$

l nach (4) und (5):

$$\tfrac{5}{4} \leqq \Gamma_2 \leqq \sqrt{3}, \qquad \tfrac{5}{4} \leqq \Gamma_3 \leqq \sqrt{4}.$$

n sei n eine zusammengesetzte Zahl und >5; n liege zwischen den den aufeinanderfolgenden Primzahlen p und q $(5 \leqq p < q)$. Dann ist $\leqq 2p-2$, denn nach dem bekannten von Bertrand vermuteten und Tschebyschef bewiesenen Satz [6]) gibt es für jedes ganze $x \geqq 7$ mintens eine Primzahl t, welche dem Intervall

$$\frac{x}{2} < t < x-2$$

ehört. Somit ist

$$5 \leqq p < n < q \leqq 2p-2 < 2n-2$$

$$\Gamma_{n-2} \geqq \Gamma_{p-2} \geqq \frac{1}{2}\frac{p-1}{\sqrt{p}},$$

---

[5]) Man vgl. z. B. O. Szász, Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenze, Math. Zeitschr., 1 (1918), S. 163–183 (insbes. S. 179).

[6]) Man vgl. z. B. E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der nzahlen, 1909 (Verlag Teubner), S. 22–23.

und hier ist

$$\frac{1}{2}\frac{p-1}{\sqrt{p}} = \frac{1}{2}\sqrt{p} - \frac{1}{2\sqrt{p}} > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n+2}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{n+2}}.$$

Somit wird

$$\boxed{\frac{n}{2\sqrt{2(n+2)}} < \Gamma_{n-2} \leqq \sqrt{n-1}};$$

dies gilt offenbar für jedes ganze $n \geqq 2$.

Für große n ergibt sich eine bessere untere Schranke mit Hilfe der Primzahlrelation [7])

$$\frac{p_{\nu+1}}{p_\nu} \to 1 \qquad \text{für } \nu \to \infty,$$

wobei $p_1, p_2, \ldots$ die aufeinanderfolgenden Primzahlen bedeuten; demnach ist $\frac{q}{p} \to 1$, also auch $\frac{n}{p} \to 1$, und wir können

$$p = n(1-\varepsilon_n), \qquad \varepsilon_n \to 0, \qquad n \to \infty$$

setzen. Nun wird aus (6):

$$\Gamma_{n-2} \geqq \frac{1}{2}\frac{n(1-\varepsilon_n)-1}{\sqrt{n(1-\varepsilon_n)}}$$

und hieraus folgt

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma_n}{\sqrt{n}} \geqq \frac{1}{2}}$$

Es ist eine offene Frage, ob $\lim \frac{\Gamma_n}{\sqrt{n}}$ existiert.

§ 2.

Über das infinitäre Verhalten von $|c_0| + |c_1| + \ldots + |c_n|$ für eine einzelne Potenzreihe.

Herr G. H. Hardy hat den Satz bewiesen [8]): Es sei für $|z| < 1$

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu\right| \leqq 1,$$

dann ist

$$\lim_{r\to 1-0}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu| r^\nu\right)\sqrt{1-r} = 0.$$

---

[7]) Vgl. z. B. Landau, a. a. O. [6]), S. 213.

[8]) Man vgl. z. B. E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin, Springer, 1916, § 4.

$r = 1 - \frac{1}{n}$ folgt hieraus

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} \sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu| \left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu = 0,$$

umsomehr

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\nu=0}^{n} |c_\nu| \left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu = 0.$$

ist aber

$$\sum_{\nu=0}^{n} |c_\nu| \left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu \geqq \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \sum_{\nu=0}^{n} |c_\nu|,$$

auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \sum_{\nu=0}^{n} |c_\nu| = 0,$$

heißt

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\nu=0}^{n} |c_\nu| \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Ich zeige nun, daß diese Beziehung nicht verschärft werden kann, auer gesagt, es gibt keine mit wachsendem n unbegrenzt wachsende ktion $\alpha(n)$, so daß für jede Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$, die der Bedingung (E) ügt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha(n)}{\sqrt{n}} \sum_{\nu=0}^{n} |c_\nu| = 0$$

e. Vielmehr gibt es zu $\alpha(n)$ eine Potenzreihe

$$G(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu z^\nu,$$

den Eigenschaften:

$G(z)$ ist regulär für $|z| < 1$ und stetig im Kreise $|z| \leqq 1$, und es ist:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\alpha(n)}{\sqrt{n}} \sum_{\nu=0}^{n} |\gamma_\nu| > 0 \ ^{9}).$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann ich annehmen, daß $\alpha(n)$ wachsendem n *monoton* und unbegrenzt wächst. Offenbar ist es nun glich, die Primzahlen

$$q_1 < q_2 < q_3 < \cdots \qquad (q_\nu \equiv 1 \pmod 4)$$

---

[9]) Offenbar kann dann auch $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\alpha(n)}{\sqrt{n}} \sum_{\nu=0}^{n} |\gamma_\nu| = \infty$ erzielt werden.

so zu bestimmen, daß

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_\nu = n_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

gesetzt, die unendliche Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha(n_\nu)}$ konvergiert; hierzu ist nur notwendig, daß die Zahlenfolge (7) hinreichend stark wachse. Es bezeichne jetzt

$$G_q(z) = \sum_{\nu=0}^{2q-2} c_\nu^{(q)} z^\nu \qquad (q = q_1, q_2, \ldots)$$

das Polynom $2q-2$-ten Grades (vgl. § 1)[10]:

$$\tfrac{1}{2}\left(a_{q-1}^{(q)} + a_{q-2}^{(q)} z + \ldots + a_{q-1}^{(q)} z^{2q-2}\right);$$

dann ist

$$|G_q(z)| \leqq 1 \quad \text{für} \quad |z| \leqq 1,$$

und

$$\sum_{\nu=0}^{2q-2} |c_\nu^{(q)}| = \frac{q-1}{\sqrt{q}}.$$

Ich bilde nun die unendliche Reihe

$$(8) \qquad \frac{G_{q_1}(z)}{\alpha(n_1)} + \frac{z^{2q_1-1} G_{q_2}(z)}{\alpha(n_2)} + \frac{z^{2(q_1+q_2)-2} G_{q_3}(z)}{\alpha(n_3)} + \ldots;$$

diese Reihe konvergiert für $|z| \leqq 1$ gleichmäßig und stellt daher eine für $|z| < 1$ reguläre und für $|z| \leqq 1$ stetige Funktion $G(z)$ dar; es ist nämlich für $|z| \leqq 1$

$$\left| \sum_{\nu=0}^{\varkappa} \frac{z^{2n_\nu - \nu} G_{q_{\nu+1}}(z)}{\alpha(n_{\nu+1})} \right| \leqq \sum_{\nu=1}^{\varkappa} \frac{1}{\alpha(n_{\nu+1})}.$$

Daher kann die Reihe (8) nach Potenzen von z geordnet werden, und es ist

$$9) \quad G(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu z^\nu = \frac{c_0^{(q_1)}}{\alpha(n_1)} + \ldots + \frac{c_{2q_1-2}^{(q_1)} z^{2q_1-2}}{\alpha(n_1)} + \frac{c_0^{(q_2)} z^{2q_1-1}}{\alpha(n_2)} + \ldots.$$

Ferner ist

$$|\gamma_0| + |\gamma_1| + \ldots + |\gamma_{2n_\varkappa - \varkappa - 1}| = \frac{q_1-1}{\alpha(n_1)\sqrt{q_1}} + \frac{q_2-1}{\alpha(n_2)\sqrt{q_2}} + \ldots + \frac{q_\varkappa - 1}{\alpha(n_\varkappa)\sqrt{q_\varkappa}},$$

also

$$\sigma_{2n_\varkappa} = \sum_{\nu=0}^{2n_\varkappa} |\gamma_\nu| > \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\varkappa} \frac{q_\nu}{\alpha(n_\nu)\sqrt{q_\nu}},$$

oder

$$\sigma_{2n_\varkappa} > \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\varkappa} \frac{\sqrt{q_\nu}}{\alpha(n_\nu)} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots).$$

---

[10]) Mit Hilfe des Bernsteinschen Satzes bzw. seiner in Fußn. [4]) angegebenen Verallgemeinerung können offenbar bei entsprechender Modifikation der $G_q(z)$ für die q_ν auch *beliebige* Primzahlen, ja auch zusammengesetzte Zahlenwerte eingeführt werden.

Nun gilt für beliebige positive Zahlen $a > b$ die Ungleichheit

$$\sqrt{a-b} > \sqrt{a} - \sqrt{b},$$

n dies heißt

$$a - b > a + b - 2\sqrt{ab},$$

r

$$2\sqrt{ab} > 2b, \quad \text{also} \quad \sqrt{a} > \sqrt{b}.$$

her ist

$$\sqrt{q_\nu} > \sqrt{n_\nu} - \sqrt{n_{\nu-1}} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots),$$

$$\sum_{\nu=1}^{\varkappa} \frac{\sqrt{q_\nu}}{\alpha(n_\nu)} > \frac{\sqrt{n_1}}{\alpha(n_1)} + \sum_{\nu=2}^{\varkappa} \frac{\sqrt{n_\nu} - \sqrt{n_{\nu-1}}}{\alpha(n_\nu)} \qquad (\varkappa = 2, 3, \ldots).$$

eraus folgt

$$\sum_{\nu=1}^{\varkappa} \frac{\sqrt{q_\nu}}{\alpha(n_\nu)} > \frac{\sqrt{n_1}}{\alpha(n_1)} + \sum_{\nu=2}^{\varkappa} \left(\frac{\sqrt{n_\nu}}{\alpha(n_\nu)} - \frac{\sqrt{n_{\nu-1}}}{\alpha(n_{\nu-1})} \right),$$

$$\sum_{\nu=1}^{\varkappa} \frac{\sqrt{q_\nu}}{\alpha(n_\nu)} > \frac{\sqrt{n_\varkappa}}{\alpha(n_\varkappa)},$$

l schließlich

$$\sigma_{2n_\varkappa} > \frac{1}{2} \frac{\sqrt{n_\varkappa}}{\alpha(n_\varkappa)} > \frac{1}{2} \frac{\sqrt{n_\varkappa}}{\alpha(2n_\varkappa)} \qquad (\varkappa = 2, 3, \ldots).$$

mit ergibt sich

$$\boxed{\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\alpha(n)}{\sqrt{n}} \sum_{\nu=0}^{n} |\gamma_\nu| \geqq \frac{1}{2\sqrt{2}}};$$

s ist eine Verschärfung der in der Einleitung zitierten Carlemanschen ziehung (1)[11]).

Ähnlich wie bei Herrn Carleman aus (1), folgt nun aus (10) bei igneter Wahl von $\alpha(n)$ die Divergenz der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} |\gamma_\nu|^{2-\delta}$ für jedes > 0. Es gilt nämlich allgemein die Ungleichung (vgl. z. B. Jensen, a mathematica, **30**, S. 181):

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \right)^{1-\frac{1}{p}} \qquad (p \geqq 1, a_\nu > 0, x_\nu > 0);$$

[11]) Hier möchte ich die Frage aufwerfen, ob es möglich ist, zu beliebigem $) \to \infty$ in der Klasse (E) eine Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu z^\nu$ zu finden, für die der Grenz

t $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha(n)}{\sqrt{n}} \sum_{\nu=0}^{n} |\gamma_\nu|$ existiert und > 0 ist.

hieraus folgt für

$$a_\nu = 1, \quad x_\nu = |\gamma_\nu|, \quad p = 2 - \delta \qquad (\delta \leqq 1$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\gamma_\nu| \leqq \Big(\sum_{\nu=1}^{n} |\gamma_\nu|^{2-\delta}\Big)^{\frac{1}{2-\delta}} n^{\frac{1-\delta}{2-\delta}},$$

oder

$$\Big(\sum_{\nu=1}^{n} |\gamma_\nu|^{2-\delta}\Big)^{\frac{1}{2-\delta}} \geqq \frac{n^{\frac{\delta}{2(2-\delta)}}}{\sqrt{n}} \sum_{\nu=1}^{n} |\gamma_\nu|.$$

Es genügt also z. B. $\alpha(n) = \log n$ oder $\alpha(n) = \log^2 n$ zu setzen, um zu sehen, daß für jedes $\delta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} |\gamma_\nu|^{2-\delta} = \infty.$$

Man kann nun auch ein weitergehendes Resultat erzielen. Setzt man nämlich in (11)

$$a_\nu = \nu^{\frac{\varkappa}{1-\delta}}, \quad x_\nu = \frac{|\gamma_\nu|}{\nu^\varkappa}, \quad p = 2 - \delta, \quad \varkappa < \frac{\delta}{2}, \qquad (\delta < 1$$

so ergibt sich

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\gamma_\nu| \leqq \Big(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-\varkappa} |\gamma_\nu|^{2-\delta}\Big)^{\frac{1}{2-\delta}} \Big(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\frac{\varkappa}{1-\delta}}\Big)^{\frac{1-\delta}{2-\delta}}.$$

Nun ist

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\frac{\varkappa}{1-\delta}} < \int_1^{n+1} x^{\frac{\varkappa}{1-\delta}} dx < (n+1)^{1+\frac{\varkappa}{1-\delta}},$$

also

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\gamma_\nu| < \Big(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-\varkappa} |\gamma_\nu|^{2-\delta}\Big)^{\frac{1}{2-\delta}} (n+1)^{\frac{1-\delta+\varkappa}{2-\delta}}, \qquad (\delta \leqq 1$$

oder

$$\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-\varkappa} |\gamma_\nu|^{2-\delta}\Big)^{\frac{1}{2-\delta}} > \frac{\sum_{\nu=1}^{n} |\gamma_\nu|}{(n+1)^{\frac{1}{2} + \frac{2\varkappa-\delta}{2(2-\delta)}}}.$$

Hieraus und aus (10) folgt die Divergenz der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-\varkappa} |\gamma_\nu|^{2-\delta}$, wenn nu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha(n)}{n^{\frac{\delta-2\varkappa}{2(2-\delta)}}} = 0.$$

Dies ist für jedes $\varkappa < \frac{\delta}{2}$ und $\delta > 0$ erfüllt, wenn z. B. $\alpha(n) = \log n$, od $\alpha(n) = \log^2 n$ gesetzt wird. Somit haben wir das Resultat: *Es gibt ei*

enzreihe $P(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$, *so daß* $P(z)$ *für* $|z|\leqq 1$ *stetig ist, und* $|\gamma_\nu|^{2-\delta}\cdot\nu^{-\varkappa}$ *für jedes* $0<\delta\leqq 1$ *und* $\varkappa<\frac{\delta}{2}$ *divergiert*; (9) *ist eine che Potenzreihe, falls* $\alpha(n)=\log^2 n$ *ist.*

Ob dies auch für $\varkappa=\frac{\delta}{2}$ gilt, ist eine offene Frage.

§ 3.

Potenzreihen, die auf dem Einheitskreise gleichmäßig, aber nicht absolut konvergieren.

Die ϱ-te Partialsumme der Potenzreihe (9) sei mit $s_\varrho(z)$ bezeichnet, l es sei

$$2n_\nu-\nu<\varrho\leqq 2n_{\nu+1}-(\nu+1);$$

n ist

$$s_\varrho(z)=s_{2n_\nu-\nu-1}(z)+\frac{z^{2n_\nu-\nu}}{\alpha(n_{\nu+1})}(\beta_0+\beta_1 z+\ldots+\beta_\lambda z^\lambda),$$

bei

$$\varrho=2n_\nu-\nu+\lambda,\qquad \lambda\leqq 2(n_{\nu+1}-n_\nu)-1$$

$\beta_0+\beta_1 z+\ldots+\beta_\lambda z^\lambda$ ist eine Partialsumme des Polynoms $G_{q_{\nu+1}}(z)$, l es ist

$$|G_{q_{\nu+1}}(z)|\leqq 1\quad\text{für}\quad |z|\leqq 1.$$

n gilt aber für jede Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$, die zur Klasse (E) gehört, die ziehung

$$\Big|\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu z^\nu\Big|<c\log n\quad\text{für}\quad |z|\leqq 1\qquad (n=2,3,\ldots),$$

c eine feste Konstante bedeutet[12]).

Daher ist

$$|\beta_0+\beta_1 z+\ldots+\beta_\lambda z^\lambda|<2c\log q_{\nu+1}$$

l

$$|G(z)-s_\varrho(z)|<|G(z)-s_{2n_\nu-\nu-1}(z)|+\frac{2c\log q_{\nu+1}}{\alpha(n_{\nu+1})};$$

nun

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{\log q_\nu}{\alpha(n_\nu)}=0,$$

ergibt sich aus (12) die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (9) für $\leqq 1$. (13) ist sicher erfüllt, wenn

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{\alpha(n)}=0,$$

[12]) Vgl. z. B. Landau, a. a. O. [8]), S. 8–9, 20–23.

also z. B. $\alpha(n) = \log^2 n$ ist. Mit Rücksicht auf das Resultat des § 2 gilt somit der

Satz. *Es gibt eine Potenzreihe* $\sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu z^\nu$, *die für* $|z| \leqq 1$ *gleichmäßig konvergiert, wobei aber* $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-\varkappa} |\gamma_\nu|^{2-\delta}$ *für jedes* $0 < \delta \leqq 1$ *und* $\varkappa < \frac{\delta}{2}$ *divergiert*; (9) *stellt eine solche Potenzreihe dar, falls* $\alpha(n) = \log^2 n$ *ist*[13].

[13]) Beispiele von Potenzreihen, die auf dem Einheitskreise ausnahmslos konvergieren und den Konvergenzexponenten zwei besitzen, wurden zuerst von Herrn A. Pringsheim (Über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise, Sitzungsber. d. Bayerischen Akademie d. Wiss., math.-phys. Kl., **30**, 1900, S. 37–100, insb. § 3, S. 68–78) angegeben. Potenzreihen, die auf dem Einheitskreise ausnahmslos aber nur bedingt konvergieren, hat Herr Pringsheim schon 1885 angegeben (Über das Verhalten gewisser Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise, Math. Ann. **25**, S. 419–426), aber erst Herr H. Steinhaus (Sur une série de M. Pringsheim, Bulletin de l'acad. des sc. de Cracovie, Classe des sc. math. et nat., Série A, 1918, S. 153–160, Cracovie 1919), hat von einem solchen Beispiel gezeigt, daß es auf dem Einheitskreise auch gleichmäßig konvergiert. Herr Fejér (Comptes Rendus de l'Acad., Paris, 30. nov. 1908) vermutete und Herr M. Riesz bewies es, daß die Potenzreihe

$$\sqrt{1-z}\, e^{\frac{1}{z-1}} = e_0 + e_1 z + e_2 z^2 + \dots$$

für $|z| = 1$ gleichmäßig, aber nicht absolut konvergiert. Es ist nämlich $e_n \cong -\frac{\sin 2\sqrt{n}}{n\sqrt{\pi e}}$; man vgl. auch G. H. Hardy, A theorem concerning Taylor's series, Quarterly Journal, **44**, 1913, S. 147–160; insb. S. 160. Daselbst auch folgende Beispiele von Hardy und M. Riesz:

1. $\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\nu^{-1-\alpha i}}{\log \nu} z^\nu$, α reell $\neq 0$;

2. $\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{b_\nu z^\nu}{\log \nu}$, wobei $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu = (1-z)^{-\alpha i}$ (α reell) ist.

(Vgl. auch Landau, a. a. O. [8]), S. 61; es ist $|b_n| \cong \frac{1}{n}$.)

3. $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu = \frac{z(1-z)^{-\alpha i}}{\log(1-z)}$; es ist $c_\nu \cong \frac{-1}{\Gamma(\alpha i)} \cdot \frac{\nu^{\alpha i - 1}}{\log \nu}$.

Ebenda gibt Herr Hardy einen einfacheren Beweis für das Beispiel des Herrn Fabry (s. seine Arbeit: Ordre des points singuliers de la série de Taylor, Acta mathematica, **36**, 1913, S. 69–104, insb. S. 99–103):

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-b} e^{i\nu^a} z^\nu, \quad 0 < a < 1, \quad b > 1 - \frac{a}{2}$$

Weitere Beispiele bei Fejér, a. a. O. [3]), insbes. § 4, und neuerdings in der

Nachtrag.

Nachdem meine Arbeit der Redaktion zugegangen war, erschien im ande (S. 147—153) die Arbeit des Herrn E. Landau, „Bemerkungen einer Arbeit des Herrn Carleman: Über die Fourierkoeffizienten einer igen Funktion", von der ich wegen der in Frankfurt verzögerten Zulung des betreffenden Heftes erst vor wenigen Tagen Kenntnis nehmen nte. Hier sei dazu nur folgendes bemerkt:

Herr Landau beweist über das Carlemansche Resultat hinausgehend Relation

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \Gamma_n}{\log n} = \frac{1}{2},$$

rr Landau benutzt das Zeichen G_n für die Größe, die hier mit Γ_n eichnet wurde). Darüber hinaus beweist Herr Landau, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma_n \log n}{\sqrt{n}} > 0$$

und mit Benutzung gewisser Untersuchungen der Herren Hardy und tlewood, daß sogar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma_n}{\sqrt{n}} > 0$$

Aus meiner Arbeit ist ersichtlich, daß es zum Beweise dieser Relation nt nötig ist, die tiefgehenden Resultate der Herren Hardy und Littlewood anzuziehen, und man sieht, daß genauer

$$\frac{1}{2} \leqq \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma_n}{\sqrt{n}} \leqq 1$$

Frankfurt a. M., den 12. Dezember 1919.

---

ert. von L. Neder, Zur Konvergenz der trigonometrischen Reihen, Göttingen.), S. 44—45.

An dieser Stelle möchte ich einige Druckfehler meiner in dieser Zeitschrift früher hienenen Arbeiten berichtigen:

Bd. 1, S. 150, Z. 12 v. u. statt $\sum_{\nu,\mu=1}^{n}$ zu setzen $\sum_{\nu,\mu=0}^{n}$,

S. 161, Z. 7: statt $(g^{(n)}, G^{(n)})$ zu setzen $(2g^{(n)}, 2G^{(n)})$,

S. 166, Z. 2: statt $\sum_{\nu=1}^{n}$ zu setzen $\sum_{\nu=0}^{n}$,

S. 176, Z. 6: statt $\sin(n+1)\psi$ zu setzen $\sin(n+1)\varphi$.

(Eingegangen am 17. August 1919.)

Zusatz bei der Korrektur.

Die Abschätzungen des § 1 lassen sich leicht verschärfen. Setzt man für irgendeine ungerade Primzahl p

$$G_p(z) = \sum_{\nu=0}^{2p-2} c_\nu^{(p)} z^\nu = \begin{cases} \frac{1}{2} a_{p-1}^{(p)} + a_{p-2}^{(p)} z + \ldots + a_1^{(p)} z^{p-2} + a_1^{(p)} z^p + \ldots + a_{p-1}^{(p)} z^{2p-2}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{falls } p \equiv 1 \\ \frac{1}{2}\left(a_{p-1}^{(p)} + \ldots + a_1^{(p)} z^{p-2} - a_1^{(p)} z^p - \ldots - a_{p-1}^{(p)} z^{2p-2}\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{falls } p \equiv 3 \end{cases}$$

so ist offenbar

$$\sum_{\nu=0}^{2p-2} |c_\nu^{(p)}| = \frac{p-1}{\sqrt{p}},$$

also

$$\boxed{\Gamma_{2p-2} \geqq \frac{p-1}{\sqrt{p}}}$$

für jede Primzahl p.

Nun sei n eine beliebige zusammengesetzte Zahl, die zwischen den aufeinanderfolgenden Primzahlen p und q liegt. Dann ist

$$\Gamma_{2n-2} \geqq \Gamma_{2p-2} \geqq \frac{p-1}{\sqrt{p}},$$

ferner

$$p = n(1-\varepsilon_n), \quad \varepsilon_n > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0,$$

also

$$\Gamma_{2n-2} \geqq \frac{n(1-\varepsilon_n)-1}{\sqrt{n(1-\varepsilon_n)}};$$

um so mehr ist auch

$$\Gamma_{2n-1} \geqq \frac{n(1-\varepsilon_n)-1}{\sqrt{n(1-\varepsilon_n)}}.$$

Aus diesen beiden Ungleichungen ergibt sich sofort

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma_n}{\sqrt{n}} \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Schließlich sei bemerkt, daß in (4) für $n > 0$ stets die Ungleichheit gilt. Denn Gleichheit könnte nur gelten, wenn

$$|c_0| = |c_1| = \ldots = |c_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

und wenn außerdem in (3) Gleichheit gilt. Dazu müßte aber

und

$$c_{n+1} = 0, \; c_{n+2} = 0, \; \ldots$$

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu z^\nu\right| \equiv 1 \text{ für } |z| = 1$$

sein. Dies ist aber unmöglich.

Frankfurt a. M., den 29. Juni 1920.

Über die obere Grenze des absoluten Betrages einer analytischen Funktion auf Geraden.

Von

Gustav Doetsch in Göttingen.

Von Hadamard[1]) stammt folgender

Dreikreisesatz: *Ist* $0 < r_1 < r_2 < r_3$ *und* $f(x)$ *für* $r_1 \leqq |x| \leqq r_3$ *eutig, regulär und nicht identisch* 0, *bezeichnet ferner* $M(r)$ *das ximum von* $|f(x)|$ *auf dem Kreise* $|x| = r$, *so ist*

$$\begin{vmatrix} \log M(r_1), & \log r_1, & 1 \\ \log M(r_2), & \log r_2, & 1 \\ \log M(r_3), & \log r_3, & 1 \end{vmatrix} \leqq 0,$$

$\log M(r)$ *ist eine konvexe Funktion von* $\log r$.

Ich werde einen entsprechenden, allgemeineren Satz für Funktionen, in einem Parallelstreifen eindeutig und regulär sind, beweisen (Dreidensatz).

Hilfssatz: *Wird* $s = \sigma + ti$ *gesetzt und ist* $f(s)$ *in dem Streifen* $\sigma \leqq \sigma_2$ *regulär und von beschränkter Ordnung, d. h.*

$$f(s) = O(|t|^k)$$

konst. und reell), *sowie auf den Grenzgeraden* $\sigma = \sigma_1, \sigma = \sigma_2$ *beschränkt*:

$$|f(s)| \leqq G,$$

t auch im Innern

$$|f(s)| \leqq G.$$

Beweis: Der Satz gehört zu dem Kreis der bekannten Phragmén-

[1]) J. Hadamard, Sur les fonctions entières, Bulletin de la société mathématique rance, 24, 1896, S. 186, 187; Notice sur les travaux scientifiques de M. Jacques amard, Teil 2, Paris 1912, S. 50.

Lindelöfschen Sätze und wird folgendermaßen bewiesen[2]): Ich betrachte die ebenfalls für $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ reguläre Funktion

$$g(s) = e^{\varepsilon s^2} f(s),$$

wo $\varepsilon > 0$. Es ist

$$|g(s)| = e^{\Re(\varepsilon s^2)} |f(s)| = e^{\varepsilon(\sigma^2 - t^2)} |f(s)|,$$

also für $\sigma = \sigma_1$:

$$|g(s)| \leqq e^{\varepsilon \sigma_1^2} G,$$

für $\sigma = \sigma_2$:

$$|g(s)| \leqq e^{\varepsilon \sigma_2^2} G,$$

mithin, wenn

$$\operatorname{Max}(\sigma_1^2, \sigma_2^2) = \sigma_0^2$$

gesetzt wird:

$$|g(s)| \leqq e^{\varepsilon \sigma_0^2} G$$

für $\sigma = \sigma_1$ und $\sigma = \sigma_2$. Da $f(s)$ von endlicher Ordnung ist, so strebt $g(s)$ für $|t| \to \infty$ gegen 0, gleichmäßig in $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$. Man kann also $t_0 > 0$ so bestimmen, daß für

$$\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2, \quad |t| \geqq t_0$$
$$|g(s)| \leqq e^{\varepsilon \sigma_0^2} G$$

ist. Wird nun ein fester Punkt $s' = \sigma' + it'$ mit $\sigma_1 < \sigma' < \sigma_2$ vorgegeben, so läßt er sich in ein Rechteck einschließen, das von den Geraden $\sigma = \sigma_1$, $\sigma = \sigma_2$ und zwei Parallelen zur σ-Achse mit einem Abstand $\geqq t_0$ begrenzt ist. Auf dem Rande des Rechtecks, also auch in seinem Innern ist

$$|g(s)| \leqq e^{\varepsilon \sigma_0^2} G,$$

also speziell

$$|f(s')| = e^{-\varepsilon(\sigma'^2 - t'^2)} |g(s')| \leqq e^{\varepsilon(\sigma_0^2 - \sigma'^2 + t'^2)} G.$$

$\sigma_0^2 - \sigma'^2 + t'^2$ ist eine Konstante, ε aber kann beliebig klein sein. Also muß

$$|f(s')| \leqq G$$

sein.

Dreigeradensatz.

Es werde $s = \sigma + ti$ gesetzt, und es sei $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$. Ist $f(s)$ in dem Streifen $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_3$ eindeutig, beschränkt, mit eventueller Ausnahme des Unendlichen regulär und nicht identisch 0 und bezeichnet $L(\sigma)$ die kleinste nach endliche obere Grenze von $|f(s)|$ auf der Geraden $\Re(s) = \sigma$ $(\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_3)$, so ist

$$L(\sigma_2)^{\sigma_3 - \sigma_1} \leqq L(\sigma_1)^{\sigma_3 - \sigma_2} L(\sigma_3)^{\sigma_2 - \sigma_1}$$

[2]) Vgl. eine Andeutung des Beweises in G. H. Hardy and M. Riesz, The general theory of Dirichlet's series. Cambridge Tracts, 18, Cambridge 1915, S. 16.

$$\begin{vmatrix} \log L(\sigma_1), & \sigma_1, & 1 \\ \log L(\sigma_2), & \sigma_2, & 1 \\ \log L(\sigma_3), & \sigma_3, & 1 \end{vmatrix} \leqq 0,$$

. $\log L(\sigma)$ *ist eine konvexe Funktion von* σ.

Beweis[3]): Es sei α eine reelle Zahl. Dann ist

$$\varphi(s) = e^{\alpha s} f(s)$$

lem Streifen $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_3$ regulär, eindeutig und beschränkt, also a fortiori endlicher Ordnung. Auf der Geraden $\sigma = \sigma_1$ ist

$$|\varphi(s)| \leqq e^{\alpha\sigma_1} L(\sigma_1),$$

$\sigma = \sigma_3$

$$|\varphi(s)| \leqq e^{\alpha\sigma_3} L(\sigma_3).$$

h dem Hilfssatz ist also für $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_3$:

$$|\varphi(s)| \leqq \mathrm{Max}\{e^{\alpha\sigma_1} L(\sigma_1),\ e^{\alpha\sigma_3} L(\sigma_3)\}.$$

glich gilt auch für die obere Grenze $e^{\alpha\sigma_2} L(\sigma_2)$ der Funktion $\varphi(s)$ auf $= \sigma_2$:

$$e^{\alpha\sigma_2} L(\sigma_2) \leqq \mathrm{Max}\{e^{\alpha\sigma_1} L(\sigma_1),\ e^{\alpha\sigma_3} L(\sigma_3)\}$$

r

$$L(\sigma_2) \leqq \mathrm{Max}\{e^{\alpha(\sigma_1-\sigma_2)} L(\sigma_1),\ e^{\alpha(\sigma_3-\sigma_2)} L(\sigma_3)\}.$$

setze nun speziell

$$\alpha = \frac{\log \dfrac{L(\sigma_1)}{L(\sigma_3)}}{\sigma_3 - \sigma_1}$$

s) war als $\not\equiv 0$ vorausgesetzt, also ist $L(\sigma) \neq 0$, folglich α endlich).

nn wird

$$e^{\alpha(\sigma_1-\sigma_2)} L(\sigma_1) = \left(\frac{L(\sigma_1)}{L(\sigma_3)}\right)^{\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_3-\sigma_1}} L(\sigma_1) = L(\sigma_1)^{\frac{\sigma_3-\sigma_2}{\sigma_3-\sigma_1}} L(\sigma_3)^{\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_3-\sigma_1}}$$

l

$$e^{\alpha(\sigma_3-\sigma_2)} L(\sigma_3) = \left(\frac{L(\sigma_1)}{L(\sigma_3)}\right)^{\frac{\sigma_3-\sigma_2}{\sigma_3-\sigma_1}} L(\sigma_3) = L(\sigma_1)^{\frac{\sigma_3-\sigma_2}{\sigma_3-\sigma_1}} L(\sigma_3)^{\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_3-\sigma_1}},$$

$$e^{\alpha(\sigma_1-\sigma_2)} L(\sigma_1) = e^{\alpha(\sigma_3-\sigma_2)} L(\sigma_3)$$

l folglich

$$L(\sigma_2) \leqq L(\sigma_1)^{\frac{\sigma_3-\sigma_2}{\sigma_3-\sigma_1}} L(\sigma_3)^{\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_3-\sigma_1}},$$

h.

$$L(\sigma_2)^{\sigma_3-\sigma_1} \leqq L(\sigma_1)^{\sigma_3-\sigma_2} L(\sigma_3)^{\sigma_2-\sigma_1}.$$

---

[3]) Der Beweis verläuft analog zu dem Landauschen Beweise des Hadamard-en Dreikreisesatzes in *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der ktionentheorie*, Berlin 1916, S. 76, 77.

Der *Dreigeradensatz* enthält den *Dreikreisesatz* als *speziellen Fa*
Gelten nämlich die Voraussetzungen des Dreikreisesatzes, so bildet ma
den Kreisring $0 < r_1 \leqq |x| \leqq r_3$ durch die unendlich vieldeutige Funktio
$s = \log x$ auf den Parallelstreifen $\log r_1 \leqq \sigma \leqq \log r_3$ der s-Ebene a
und setzt $\log r_{1,2,3} = \sigma_{1,2,3}$. Die obere Grenze $L(\sigma)$ der Funktio
$|f(e^s)|$ auf der Geraden $\Re(s) = \sigma$ ist dann gleich dem Maximum von $|f(x$
auf dem Kreise $|x| = r$, und die Voraussetzungen des Dreigeradensatz
sind erfüllt.

Der Dreigeradensatz läßt sich speziell auf *Dirichletsche Reihen*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

wo

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \ldots \to \infty$$

ist, im absoluten Konvergenzgebiet, falls ein solches vorhanden ist, a
wenden. Ist $f(s)$ für $\sigma > \sigma_0$ absolut konvergent, so ist dort

$$f(s) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n \sigma},$$

also $f(s)$ in dem Streifen $\sigma_0 < \sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ beschränkt, und folglich, we
$L(\sigma)$ die obere Grenze von $|f(s)|$ auf der Geraden $\Re(s) = \sigma$ bezeichn
$\log L(\sigma)$ eine konvexe Funktion von σ in jedem Streifen der obigen A
also im ganzen Gebiet absoluter Konvergenz.

Dieser Satz ist eine Ergänzung zu dem bekannten Satz[4]) über
Konvexität der Lindelöfschen μ-Funktion[5]): Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ für $\sigma >$
absolut konvergent und die durch die Reihe für $\sigma > \sigma_0$ definierte Fu
tion $f(s)$ für $\sigma > \sigma'$ regulär $(\sigma' < \sigma_0)$ und von endlicher Ordnung, so
die für $\sigma > \sigma'$ definierte Lindelöfsche μ-Funktion entweder überall
oder 0 für $\sigma \geqq \sigma''$, wo $\sigma' < \sigma'' \leqq \sigma_0$, und für $\sigma' < \sigma < \sigma''$ positiv, mono
abnehmend, stetig und konvex.

Göttingen, 5. November 1919.

---

[4]) Vgl. z. B. Hardy and Riesz, l. c. S. 16—18.

[5]) Bei festem σ ist $\mu(\sigma)$ definiert als untere Grenze der k, für die $f(s) = O(|t|^k)$

(Eingegangen am 28. Januar 1920.)

Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen.

Von

Alexander Ostrowski in Göttingen.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

1. Über die Eigenschaft einer Klasse von Dirichletschen Reihen keiner algebraischen Differenzendifferentialgleichung zu genügen.
2. Beweis der Eigenschaft der Reihe $x+\frac{x^2}{2^s}+\frac{x^3}{3^s}+\ldots$ und analog gebauter Reihen, keiner algebraischen partiellen Differentialgleichung zu genügen.
3. Über eine Klasse analytischer Funktionen von zwei Variablen.
4. Der Hauptsatz für beliebige konvergente Dirichletsche Reihen und einige Erweiterungen des Hauptsatzes.
5. Über den Begriff der algebraisch-transzendenten Funktion.
6. Über den Begriff der algebraisch-transzendenten Funktion bei mehreren Variablen.
7. Über algebraisch-transzendente Dirichletsche Reihen und Potenzreihen, die nach beliebigen Potenzen der unabhängigen Veränderlichen fortschreiten.
8. Potenzreihen, die keiner analytischen Differentialgleichung genügen.

Einleitung.

Nachdem Hölder bewiesen hat, daß die *Gammafunktion* keiner algebraischen Differentialgleichung genügt[1]), wurde dieselbe Eigenschaft für viele Funktionen bewiesen. Zu den interessantesten Resultaten in dieser Beziehung dürfte der Satz von Hilbert gehören, daß die *Riemann-*

[1]) Math. Ann., 28 (1887), S. 1–13, für andere Beweise des Satzes vgl. E. H. Moore, Math. Ann., 48 (1897), S. 49–74; N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion. Leipzig. Teubner (1906); A. Ostrowski, Math. Ann., 79 (1919), S. 286–284.

sche ζ-Funktion keiner algebraischen Differentialgleichung genügt[2]). Im ersten Paragraphen der vorliegenden Abhandlung werde ich nun beweisen, daß dieselbe Eigenschaft *allen Dirichletschen Reihen*

$$\sum \frac{a_n}{n^s}$$

zukommt, bei denen *alle Koeffizienten* a_n *von* 0 *verschieden* sind, oder auch nur *solche Koeffizienten von* 0 *verschieden bleiben, daß die Indizes* n *dieser Koeffizienten* a_n *durch unendlich viele verschiedene Primzahlen teilbar sind.* Noch allgemeiner, jede Dirichletsche Reihe

$$\sum a_n e^{-\lambda_n s}$$

besitzt diese Eigenschaft, bei der alle λ_n sich nicht durch endlich viele unter ihnen linear ganzzahlig ausdrücken lassen, insbesondere also, wenn unter den λ_n unendlich viele linear unabhängig sind. Wir werden diesen Satz in einer insofern noch allgemeineren Gestalt beweisen (Satz 1 u. 6), als wir die Unmöglichkeit einer algebraischen *Differenzendifferentialgleichung* nachweisen, also einer Funktionalgleichung von der Form

$$F(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(\nu)}(x), f(x+h_1), \ldots, f^{(\nu_1)}(x+h_1), \ldots,$$
$$f(x+h_\mu), \ldots, f^{(\nu_\mu)}(x+h_\mu)) = 0,$$

wo $h_1, h_2, \ldots, h_\mu$ reelle Zahlen sind, F aber ein Polynom in den in F auftretenden Argumenten ist. Dies ist insofern von Wichtigkeit, als sich mit Hilfe der hierin enthaltenen Tatsache, daß die Riemannsche ζ-Funktion keiner algebraischen *Differenzen*differentialgleichung genügt, die Richtigkeit des von Hilbert vor etwa 20 Jahren vermutungsweise als „wahrscheinlich" ausgesprochenen und seitdem noch nicht bewiesenen Satzes nachweisen läßt, daß die Funktion $\zeta(x, s)$, die für $|x| \leqq 1$, $\Re(s) > 1$ durch die Reihe definiert wird:

$$\zeta(x, s) = \frac{x}{1^s} + \frac{x^2}{2^s} + \frac{x^3}{3^s} + \ldots,$$

als Funktion der beiden Variablen x, s aufgefaßt, keiner algebraischen partiellen Differentialgleichung genügt[3]). Dieser Nachweis wird im § 2

[2]) Hilbert, Mathematische Probleme, C. R. du 2. congrès international des math., Paris 1902, S. 100. Die Ausführung des Beweises gibt V. E. E. Stadigh Dissertation, Helsingfors 1902. Wegen Literaturangaben über Funktionen, die keiner algebraischen Differentialgleichung genügen, sei überhaupt auf die Einleitung zu Dissertation von Stadigh, sowie auf die Abhandlung von R. D. Carmichael Trans. Am. M. Soc., 14 (1913), S. 311 verwiesen.

[3]) Mathematische Probleme, l. c. S. 101.

racht (Satz 2), und zwar mit Hilfe der von Hilbert l. c. angegebenen
nktionalgleichung

$$x\frac{\partial\zeta(x,s)}{\partial x}=\zeta(x,s-1),$$

$\zeta(x,s)$ genügt. Dann geben wir aber für diesen Satz einen zweiten
weis, der weder von der Hilbertschen Funktionalgleichung noch von
Entwickelungen des ersten Paragraphen Gebrauch macht, und in dessen
lauf die Eigenschaft, keiner partiellen algebraischen Differentialgleichung
genügen, z. B. für alle Reihen von der Form

$$\sum\frac{f_n(x)}{n^s}$$

hgewiesen wird, wo $f_n(x)$ ein beliebiges Polynom genau vom n-ten
de ist, und die Konvergenzbedingungen erfüllt sind (Satz 3). Im § 3
nen wir aus der in § 2 bewiesenen Eigenschaft von $\zeta(x,s)$ weitere
gerungen. Es ergibt sich z. B., daß es unmöglich ist, $\zeta(x,s)$ aus be-
igen analytischen Funktionen einer Variablen und beliebigen algebra-
nen Funktionen mehrerer Variablen durch sukzessive Einschachtelung zu
innen (Satz 4)[4]). Die beim Beweis erforderlichen Eliminationen lassen
vollständig streng und besonders einfach und übersichtlich mit Hilfe
es (selbstverständlich längst bekannten) algebraischen Lemmas durch-
ren, für welches ich im § 4 den auf körpertheoretischen Betrachtungen
uhenden Beweis nachtrage, und das sich bei vielen verwandten Unter-
hungen in ähnlicher Weise benutzen läßt. Nachdem im § 4 noch einige
gänzungen zu den Entwicklungen von § 1 gegeben werden, untersuchen
im § 5 allgemeiner die Eigenschaften von analytischen Funktionen,
algebraischen Differentialgleichungen genügen können — „*algebraisch-
nszendenten Funktionen*". Die Ergebnisse von § 5 gestatten uns dann,
Sätze von § 1 und § 4 auf Potenzreihen zu übertragen. Es ergibt sich
ei z. B. der Satz, daß man aus jeder Potenzreihe durch Multiplikation
isser Glieder mit -1 auf unendlich viele verschiedene Weisen Potenz-
nen erhalten kann, die keiner algebraischen Differentialgleichung ge-
gen (Satz 11), und einige andere Resultate, aus denen ich etwa den
z hervorheben möchte, daß die Reihe

$$\frac{x}{1^s}+\frac{x^2}{2^s}+\frac{x^3}{3^s}+\cdots$$

keinen konstanten rationalen gebrochenen Wert von s einer algebra-
en Differentialgleichung genügt. Für *irrationale* Werte von s liegt

[4]) Diese Fragestellung ist durch den bekannten Satz von Hilbert angeregt,
es analytische Funktionen von drei Variablen gibt, die sich nicht durch endlich
malige Verkettung von Funktionen von zwei Variablen bilden lassen. l. c. S. 92

wohl diese Eigenschaft sehr nahe, ich konnte jedoch keinen strengen Be weis hierfür erbringen. Im nächsten Paragraphen (§ 6) kann ich jedoch als Korollar aus einem allgemeineren Satz folgern, daß die Menge der Werte von s, für die $\zeta(x, s)$ einer algebraischen Differentialgleichung genügt, *abzählbar* ist. — Im § 6 greife ich nun die allgemeine Frage an, welche Dirichletsche Reihen überhaupt algebraischen Differentialgleichungen ge nügen können. Aus den Ergebnissen der beiden ersten Paragraphen folgt, daß eine solche Dirichletsche Reihe vom Typus

$$\sum \frac{a_n}{n^s}$$

die Form haben muß

$$F(n_1^{-s}, n_2^{-s}, \ldots, n_\mu^{-s}),$$

wo $F(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)$ eine Potenzreihe in ihren μ Argumenten ist. Un man kann leicht solche Potenzreihen F bilden, die für jede Wahl de ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_\mu$ Funktionen von s darstellen, die algebraische Differentialgleichungen genügen. Denn es gibt Funktionen $F(x_1, \ldots, x_\mu$ mit der Eigenschaft, daß $F(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_\mu(x))$ stets einer algebra schen Differentialgleichung genügt, sobald das gleiche für $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ $\varphi_\mu(x)$ der Fall ist. Wir beweisen nun, daß eine Funktion $F(x_1, \ldots, x_\mu$ dann und nur dann diese letzte Eigenschaft besitzt, wenn sie einer sogenannten Mayerschen System algebraischer partieller Differentialgleichungen genügt (Satz 15). (Unser Beweisverfahren führt zu einem noch schärferen Satz.) Genügt eine allgemeine Dirichletsche Reihe vom Typus

$$\sum a_n e^{-\lambda_n s}$$

einer algebraischen Differentialgleichung, so läßt sie sich, nach den Er gebnissen der §§ 1 und 2 in der Form darstellen

$$F(e^{-\lambda_1 s}, e^{-\lambda_2 s}, \ldots, e^{-\lambda_\mu s}),$$

wo F eine Potenzreihe ist, die nach positiven *und* negativen Potenzen ihrer Argumente fortschreitet, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ aber reelle positive linear un abhängige Zahlen sind. Für Dirichletsche Reihen vom Typus

$$\sum \frac{a_n}{n^s}$$

schreitet die Potenzreihe F nach positiven Potenzen ihrer Argumente fort und nur in diesem Fall kann man auf die Existenz einer analytischen Funktion schließen, die durch die in einem gewissen Gebiete konvergente Potenzreihe F dargestellt wird. Jedenfalls kann wohl selbst im Falle d Existenz einer solchen Funktion F daraus, daß sie für ein gewisses Wer system linear unabhängiger $\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$ zu einer eine algebraische Differentia

leichung befriedigenden Dirichletschen Reihe führt, noch nicht ge-chlossen werden, daß sie die im oben angegebenen Satz vorausgesetzte igenschaft besitzt. Es läßt sich aber beweisen, daß sie einer alge-raischen partiellen Differentialgleichung genügt (Satz 19), und diese Eigen-chaft bleibt sogar dann bestehen, wenn die Potenzreihe $F(x_1, \ldots, x_\mu)$ einen 2μ-dimensionalen Konvergenzbereich besitzt. In diesem Falle gibt s eine partielle algebraische Differentialgleichung, der die Potenzreihe $(x_1, \ldots, x_\mu)$ *formal* genügt. Dagegen kann bewiesen werden, und ich ebe diesen Beweis am Schlusse des § 7, daß, wenn die Funktionen $(e^{-\lambda_1 s}, e^{-\lambda_2 s}, \ldots, e^{-\lambda_\mu s})$ für jedes linear unabhängige Wertsystem der po-tiven λ einer algebraischen Differentialgleichung genügen, dasselbe stets uch für

$$F(\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots, \varphi_\mu(s))$$

ilt, sobald $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_\mu(s)$ algebraischen Differentialgleichungen genügen Satz 20). Auch diese letzten Ergebnisse lassen sich auf die nach belie-igen Potenzen von x entwickelten Integrale algebraischer Differential-leichungen übertragen, worauf ich ebenfalls im § 7 eingehe. Diese Re-ultate hängen eng zusammen mit den von Poincaré, Picard und anderen ntwickelten Methoden zur Untersuchung von Integralen von Systemen ge-öhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung in der Umgebung kritischer tellen[5]).

In § 8 beweise ich endlich (Satz 21 und 22), daß eine Potenzreihe

$$\sum a_i x^{n_i} \qquad (n_{i-1} < n_i < \ldots \text{ad inf.}),$$

n der nicht alle n_i sich linear ganzzahlig durch endlich viele unter ihnen arstellen lassen, keiner an der dem Wert $x = 0$ entsprechenden Stelle *nalytischen* Differentialgleichung genügen kann. (Für komplexe n_i sind och einige weitere Voraussetzungen nötig.) Durch diesen Satz wird ein Beispiel von so schweren (Verzweigungs-) Singularitäten gegeben, daß die nit ihnen behafteten Funktionen nicht einmal als Lösungen von an er entsprechenden Stelle *analytischen* Differentialgleichungen erhalten erden können. Der Beweis verläuft ganz nach demselben Schema, wie n § 1, abgesehen von einem Punkt, der bei algebraischen Differential-leichungen selbstverständlich ist. Es handelt sich um eine Tatsache, in er insbesondere der Satz enthalten ist, daß, wenn eine analytische unktion einer analytischen Differentialgleichung genügt, sie auch einer olchen analytischen Differentialgleichung genügt, bei der sie kein *singu-äres Integral* ist. Ein direkter Beweis dieser Tatsache bietet Schwierig-eiten, da der Weierstraßsche Vorbereitungssatz bei Potenzreihen in

[5]) E. Picard, Traité d'Analyse, 3 (2. éd.), S. 1—40.

mehreren Variablen bekanntlich im allgemeinen erst nach einer geeigneten linearen Transformation anwendbar ist, eine solche aber bei Differentialgleichungen nicht zulässig ist. Daher mußte diese Schwierigkeit auf einem Umwege überwunden werden.

Die Hilfsmittel, mit denen die Beweise geführt werden, sind sehr elementar. Aus der Theorie der Dirichletschen Reihen wird nur der Eindeutigkeitssatz benutzt, nach dem in einer konvergenten, nach wachsendem λ geordneten Dirichletschen Reihe $\sum a_i e^{-\lambda_i s}$, die als Funktion von s für alle hinreichend große positive s verschwindet, alle Koeffizienten a_i verschwinden. Im übrigen haben sich die meisten Beweise auf einfache formal algebraische Schlüsse zurückführen lassen[6]).

§ 1.

Über die Eigenschaft einer Klasse von Dirichletschen Reihen, keiner algebraischen Differenzendifferentialgleichung zu genügen.

Définition. *Unter einer algebraischen Differenzendifferentialgleichung verstehen wir eine Funktionalgleichung von der Form:*

$$F(x, f^{(\nu)}(x+h_\mu)) = 0, \tag{1}$$

wo $h_1, h_2, \ldots$ endlich viele reelle Zahlen sind, und F eine Polynom in seinen Argumenten ist.

Hilfssatz 1. *Genügt eine analytische Funktion $\varphi(x)$ einer algebraischen Differenzendifferentialgleichung von der Form* (1), *so genügt sie auch einer Differenzendifferentialgleichung*

$$F(f^{(\nu)}(x+h_\mu)) = 0,$$

in der F die unabhängige Variable x explizit nicht enthält.

Wir können annehmen, daß F ein in seinen Argumenten irreduzibles Polynom vom Grade n ist. Differenzieren wir (1) total nach x, so entsteht eine neue Differenzendifferentialgleichung für φ

$$F^*(x, f^{(\nu)}(x+h_\mu)) = 0,$$

wo $F^*(x, f^{(\nu)}(x+h_\mu))$ ein Polynom in seinen Argumenten ist, *dessen Grad nicht höher als n ist.* Andererseits enthält F^* sicher wenigstens einen bei der Differentiation hinzukommenden Ausdruck $f^{(\nu)}(x+h_\mu)$, der in F nicht vorkommt. Daher kann F^* durch F nicht teilbar sein, und da F irreduzibel ist, wird die Resultante der Polynome F und F^* in bezug auf x ein nicht identisch verschwindendes Polynom $F^{**}(f^{(\nu)}(x+h_\mu))$ sein.

---

[6]) Die vorliegende Abhandlung stellt einen Abdruck einer von der philosophischen Fakultät der Universität Göttingen angenommenen Inauguraldissertation dar.

enn sonst hätten die Polynome F und F^* einen gemeinsamen Teiler, er in bezug auf x ganz, in den Ausdrücken $f^{(\nu)}(x+h_\mu)$ rational wäre. aher würden sie nach den bekannten Sätzen über die eindeutige Zergung von Polynomen in irreduzible Faktoren auch einen gemeinsamen eiler besitzen, der in x und $f^{(\nu)}(x+h_\mu)$ *ganz* wäre, und dies ist unöglich. Nun gilt eine Identität

$$F^{**} = M_1 F + M_2 F^*,$$

o M_1 und M_2 Polynome in $x, f^{(\nu)}(x+h_\mu)$ sind. Daher genügt $\varphi(x)$ ıch der algebraischen Differenzendifferentialgleichung

$$F^{**}(f^{(\nu)}(x+h_\mu)) = 0,$$

der x explizite nicht vorkommt, w. z. b. w.

Durch sukzessive Anwendung desselben Beweisverfahrens beweist man ıne weiteres, daß *wenn eine analytische Funktion* $\varphi(x, y, \ldots)$ *einer lgebraischen partiellen Differentialgleichung genügt, sie auch einer solchen lgebraischen partiellen Differentialgleichung genügt, in der* $x, y, \ldots$ *exlizit nicht vorkommen.*

Hilfssatz 2. *Es seien* τ, $\varkappa$ *ganze positive Zahlen,* $k_1, k_2, \ldots, k_\varkappa$ *reelle ntereinander verschiedene Zahlen und es werde ein Ausdruck betrachtet*

$$L(\lambda) = \sum c_{t,i}\, \lambda^t e^{\lambda k_i} \quad (t = 0, 1, \ldots, \tau;\ i = 1, 2, \ldots, \varkappa),$$

dem nicht alle c verschwinden. Dann besitzt dieser Ausdruck als unktion von λ *nur endlich viele reelle Wurzeln.*

Beweis. Besitzt $L(\lambda)$ unendlich viele reelle Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, so önnen wir aus ihnen jedenfalls eine Teilfolge von solchen Wurzeln herausreifen, die gegen $+\infty$ oder $-\infty$ konvergieren. Denn sonst würden die eine Häufungsstelle im Endlichen haben, und da $L(\lambda)$ in jedem endlichen unkte regulär ist, so müßte $L(\lambda)$ für jeden Wert von λ verschwinden, ıd dann kann man für $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ etwa die Zahlen 1, 2, 3, ... annehmen. s habe daher bereits die Folge

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \qquad (\lambda_i \neq 0,\ i = 1, 2, 3 \ldots)$$

r Wurzeln von $L(\lambda)$ die Eigenschaft, daß etwa $\lim_{i=\infty} \lambda_i = \infty$ ist. (Der Fall aß $\lim_{i=\infty} \lambda_i = -\infty$ ist, wird auf diesen zurückgeführt, indem man anstatt (λ) den Ausdruck $L(-\lambda)$ betrachtet.) Es sei $c_{t_1,i_1}\lambda^{t_1}e^{\lambda k_{i_1}}$ dasjenige Glied on $L(\lambda)$ mit $c_{t_1,i_1} \neq 0$, welches das größte k_i und unter allen Gliedern von (λ) mit diesem k_i das größte t hat. Lassen wir in der Gleichung

$$\frac{1}{c_{t_1,i_1}} \lambda_i^{-t_1} e^{-\lambda_i k_{i_1}} L(\lambda_i) = 1 + \sum{}' \frac{c_{t,p}}{c_{t_1,i_1}} \lambda_i^{t-t_1} e^{\lambda_i (k_p - k_{i_1})} = 0$$

unendlich werden, so erhalten wir einen Widerspruch, w. z. b. w.

Es sei nun $\varphi(s)=\sum a_i e^{-\lambda_i s}$ eine Dirichletsche Reihe, über deren Konvergenz nichts bekannt zu sein braucht, jedoch sei $\lim_{i=\infty} \lambda_i = +\infty$. Es sei $F(f^{(\nu)}(s+h_\mu))=0$ eine algebraische Differenzendifferentialgleichung, in der s explizite nicht vorkommt. Man denke sich $\varphi(s)$ in den Ausdruck F für $f(s)$ eingetragen und das Resultat rein formal ausgerechnet und in eine Dirichletsche Reihe umgeordnet. Verschwinden alle Glieder der so entstehenden Dirichletschen Reihe, so sagen wir, $\varphi(s)$ genüge *formal* der Gleichung $F(f^{(\nu)}(s+h_\mu))=0$.

Wir werden im Folgenden bei jedem Ausdruck von der Form $e^{-\lambda s}$ stets λ als seinen *Exponenten* bezeichnen.

Hilfssatz 3. *Genügt eine Dirichletsche Reihe*

$$\varphi(s)=\sum_0^\infty a_i e^{-\lambda_i s} \qquad (\lambda_0<\lambda_1<\ldots \text{ ad inf.})$$

formal einer algebraischen Differenzendifferentialgleichung

$$F(f^{(\nu)}(s+h_\mu))=0, \tag{2}$$

in der s explizite nicht vorkommt, so läßt sich von einem bestimmten λ_i an jedes λ_i linear ganzzahlig durch die vorhergehenden λ_i ausdrücken.

Es sei n der Gesamtgrad des Polynoms F in bezug auf die Argumente $f^{(\nu)}(s+h_\mu)$. Wir können annehmen, daß n den kleinstmöglichen Wert hat, so daß $\varphi(s)$ gewiß keiner algebraischen Differenzendifferentialgleichung formal genügt, deren Gesamtgrad kleiner als n ist. Wir bilden nun die Ausdrücke

$$F_{\varrho,\sigma}(f^{(\nu)}(s+h_\mu))=\frac{\partial F(f^{(\nu)}(s+h_\mu))}{\partial (f^{(\varrho)}(s+h_\sigma))}.$$

Fassen wir einen dieser Ausdrücke $F_{\varrho,\sigma}$ ins Auge, so ist er ein Polynom in $f^{(\nu)}(s+h_\mu)$, dessen Gesamtgrad kleiner als n ist. Tragen wir daher in $F_{\varrho,\sigma}$ für $f(s)$ die Reihe $\varphi(s)$ ein und rechnen das Resultat formal in eine Dirichletsche Reihe um, so können nicht alle Glieder dieser Dirichletschen Reihe verschwinden. Es sei das erste nicht verschwindende Glied der entstehenden Dirichletschen Reihe gleich $b_{\varrho,\sigma}e^{-\lambda_{\varrho,\sigma}s}$. Wir denken uns diese Anfangsglieder für jedes in Betracht kommende Zahlenpaar ϱ,σ berechnet.

Da die λ_i von einem gewissen i an positiv werden, und bei der Bildung von $F_{\varrho,\sigma}(\varphi^{(\nu)}(s+h_\mu))$ die einzelnen Glieder der Reihen $\varphi^{(\nu)}(s+h_\mu)$ höchstens $(n-1)$ mal miteinander multipliziert werden, so ist klar, daß nur endlich viele Glieder der Reihen $\varphi^{(\nu)}(s+h_\mu)$ zur Bildung der Glieder $b_{\varrho,\sigma}e^{-\lambda_{\varrho,\sigma}s}$ oder der vorhergehenden Glieder in $F_{\varrho,\sigma}(\varphi^{(\nu)}(s+h_\mu))$, die sich weggehoben haben, beitragen können. Es gibt daher eine solche positive

ahl Λ, daß, wenn wir die Reihe $\varphi(s)$ bei irgendeinem Glied mit dem xponenten $\lambda_i > \Lambda$ abbrechen und den so entstehenden, nur aus endlich elen Gliedern bestehenden Ausdruck in $F_{\varrho,\sigma}(f^{(\nu)}(s+h_\mu))$ für $f(s)$ einagen, die Resultate wieder die Anfangsglieder $b_{\varrho,\sigma}e^{-\lambda_{\varrho,\sigma}s}$ haben werden.

Die kleinste unter den Zahlen $\lambda_{\varrho,\sigma}$ möge mit Λ_1 bezeichnet werden, nd es seien etwa $\lambda_{\varrho_1,\sigma_1} = \lambda_{\varrho_2,\sigma_2} = \ldots = \lambda_{\varrho_m,\sigma_m} = \Lambda_1$, während alle übrigen $_{,\sigma} > \Lambda_1$ sein mögen.

Es werde nun für ein $\lambda_i > \Lambda$

$$\varphi(s) = A_i(s) + R_i(s), \qquad A_i(s) = \sum_0^{i-1} a_t e^{-\lambda_t s}, \qquad R_i(s) = \sum_i^{\infty} a_t e^{-\lambda_t s}$$

esetzt. Tragen wir $A_i(s)+R_i(s)$ in $F(f^{(\nu)}(s+h_\mu))$ für $f(s)$ ein und twickeln nach dem Taylorschen Lehrsatze, so entsteht

$$F(\varphi^{(\nu)}(s+h_\mu)) = F(A_i^{(\nu)}(s+h_\mu)) + \sum F_{\varrho,\sigma}(A_i^{(\nu)}(s+h_\mu))\frac{d^\varrho R_i(s+h_\sigma)}{ds^\varrho} + \sum_2 \Psi_2(R_i^{(\nu)}(s+h_\mu))\,F_2(A_i^{(\nu)}(s+h_\mu)) + \ldots \quad (3)$$

Hier sind $F_2, F_3, \ldots$ die zweiten, dritten usw. Ableitungen von F ach seinen Argumenten, $\Psi_2, \Psi_3, \ldots$ sind aber gewisse *homogene* Formen eiter, dritter usw. Dimension in den $R_i^{(\nu)}(s+h_\mu)$. Daher sind die Exnenten der Anfangsglieder von $\Psi_2(R^{(\nu)}(s+h_\mu))$, $\Psi_3(R^{(\nu)}(s+h_\mu))$, ... enigstens gleich $2\lambda_i$, $3\lambda_i$, usw. Da aber andererseits die Gesamtgrade r Polynome $F_2, F_3, \ldots$ höchstens $n-2$, $n-3$, ... sind, so erhalten r für die Exponenten der Anfangsglieder des dritten, vierten usw. Beandteils von (3) als Abschätzungen nach unten $2\lambda_i - (n-2)|\lambda_0|$. $\lambda_i - (n-3)|\lambda_0|$, ...

Fassen wir jetzt den zweiten Bestandteil der rechten Seite von (3) s Auge, so erhalten wir für sein Anfangsglied den Ausdruck

$$a_i e^{-(\Lambda_1+\lambda_i)s} \sum b_{\varrho_t,\sigma_t}(-\lambda_i)^{\varrho_t} e^{-\lambda_i h_{\sigma_t}}, \quad (4)$$

fern die Summe

$$\sum b_{\varrho_t,\sigma_t}(-\lambda)^{\varrho_t} e^{-\lambda h_{\sigma_t}}$$

r $\lambda = \lambda_i$ von 0 verschieden bleibt. Nach dem Hilfssatz 2 besitzt aber ese Summe als Funktion von λ nur endlich viele reelle Wurzeln. Bezeichnen r ihre größte Wurzel durch Λ_2, so wird für $\lambda_i > \Lambda + |\Lambda_1| + |\Lambda_2| + n|\lambda_0|$ s Glied (4) sich mit keinem anderen Gliede aus dem zweiten, dem itten usw. Bestandteil der rechten Seite von (3) wegheben können. Da er nach unserer Annahme jedes Glied der rechten Seite von (3) sich eghebt, so kommt unter den Gliedern von $F(A_i^{(\nu)}(s+h_\mu))$ ein Glied mit m Exponenten $\Lambda_1 + \lambda_i$ vor. Daher setzt sich der Exponent $\Lambda_1 + \lambda_i$ near ganzzahlig aus den Exponenten $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}$ der Glieder von

$A_i(s)$ zusammen. Andererseits setzt sich auch Λ_1 linear ganzzahlig au $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}$ zusammen, da $\lambda_i > \Lambda_1 + n|\lambda_0|$ ist. Daher ist λ_i eine linear ganzzahlige Funktion von $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}$, w. z. b. w.

Unter den Bedingungen des Hilfssatzes 3 lassen sich alle λ_i als gan zahlige Linearformen derjenigen Exponenten λ darstellen, die kleiner a $\Lambda + |\Lambda_1| + |\Lambda_2| + n|\lambda_0| + 1$ sind. Das Exponentensystem λ_i von $\varphi(s)$ b *sitzt* also, wie wir sagen werden, *eine endliche lineare Basis aus den Zahlen selbst.* Es sei etwa λ_j das letzte λ, das $< \Lambda + |\Lambda_1| + |\Lambda_2| + n|\lambda_0| + 1$ is $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_j$ brauchen natürlich nicht linear unabhängig zu sein. Ist d Anzahl der linear unabhängigen unter ihnen etwa α, so lassen sich b kanntlich α solche ganzzahlige Linearformen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\alpha$ von $\lambda_0, \lambda_1, \ldots,$ bilden, daß sich umgekehrt $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_j$ und daher auch alle λ_i linea ganzzahlig durch $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\alpha$ ausdrücken lassen. Setzen wir nun in d Reihe $\varphi(s)$ diese Ausdrücke der λ_i ein, so läßt sich $\varphi(s)$ auch schreiben

$$\Phi(e^{-\omega_1 s}, e^{-\omega_2 s}, \ldots, e^{-\omega_\alpha s}),$$

wo $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_\alpha)$ eine nach ganzen positiven und negativen Potenze von $x_1, \ldots, x_\alpha$ fortschreitende Potenzreihe ist, die allerdings vorläufig n formal hingeschrieben werden kann, solange über die Konvergenz von $\varphi($ nichts bekannt ist. — Dabei können alle ω_i positiv angenommen werde

Aus dem Hilfssatz 3 folgt insbesondere, daß unter den Exponenten nicht unendlich viele linear unabhängig sein können, falls $\varphi(s)$ der Gl chung (2) formal genügt. Um uns über die Tragweite dieses Resultat Rechenschaft zu geben, betrachten wir speziell Dirichletsche Reih vom Typus

$$\sum \frac{a_n}{n^s} = \sum a_n e^{-s \log n}. \tag{5}$$

Aus der Eindeutigkeit der Zerlegung der natürlichen Zahlen in Pri faktoren folgt, daß die Logarithmen sämtlicher Primzahlen linear una hängig sind. Sind nun unter allen Zahlen $\log n$, die in (5) wirklich v kommen, nur endlich viele linear unabhängige, so sind von einem gewissen an alle in (5) auftretenden Zahlen $\log n$ von gewissen endlich vielen Logarit men natürlicher Zahlen linear abhängig, etwa von $\log n_1, \log n_2, \ldots, \log$ Dann enthalten aber alle in (5) wirklich auftretenden Nenner n nur solc Primfaktoren, die in $n_1, n_2, \ldots, n_j$ vorkommen. Sind also die Indizes der von 0 verschiedenen a_n in (5) durch unendlich viele verschiedene Pri zahlen teilbar, so kann (5) sicher keiner Gleichung (2) formal genüge Kommen aber in den in (5) wirklich auftretenden Nennern nur endli viele Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\beta$ vor, so kann man (5) formal in der Fo schreiben

$$\Psi(p_1^{-s}, p_2^{-s}, \ldots, p_\beta^{-s}),$$

wo $\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_\beta)$ eine nach positiven Potenzen von $x_1, \ldots, x_\beta$ fortschreitende Potenzreihe ist. Besitzt aber (5) einen Konvergenzbereich (daher auch einen Bereich absoluter Konvergenz), so besitzt auch $\Psi(x_1, \ldots, x_\beta)$ einen Bereich absoluter Konvergenz und stellt in ihm eine analytische Funktion von $x_1, \ldots, x_\beta$ dar.

Satz 1. *Besitzt eine Dirichletsche Reihe*

$$\varphi(s) = \sum a_i e^{-\lambda_i s}$$

einen Bereich Ω absoluter Konvergenz und genügt die durch sie in Ω dargestellte analytische Funktion einer algebraischen Differenzendifferentialgleichung, so besitzt das System der Zahlen λ_i eine endliche lineare Basis aus den Zahlen λ_i.

Beweis. Genügt die analytische Funktion $\varphi(s)$ in Ω einer algebraischen Differenzendifferentialgleichung, so genügt sie auch, nach dem Hilfssatz 1 einer Gleichung von der Form (2) des Hilfssatzes 3. Setzen wir $\varphi(s)$ in jene Gleichung ein, und bedenken, daß auch die Reihen $\varphi^{(\nu)}(s + h_\mu)$ in einem gewissen Bereich absolut konvergieren und dort die analytischen Funktionen $\varphi^{(\nu)}(s + h_\mu)$ darstellen, so dürfen wir, da das formal gebildete Produkt von endlich vielen absolut konvergenten Dirichletschen Reihen ebenfalls einen absoluten Konvergenzbereich besitzt und in ihm das Produkt der entsprechenden Funktionen darstellt, mit der Reihe $\varphi(s)$ formal rechnen. Die so entstehende Reihe $D(s)$ besitzt einen absoluten Konvergenzbereich und stellt in ihm das Resultat der Einsetzung von $\varphi(s)$ in die linke Seite der Differenzendifferentialgleichung dar. Da aber dieses Resultat identisch verschwindet, so muß nach dem Eindeutigkeitssatze auch die Reihe $D(s)$ identisch verschwinden. Daher genügt $\varphi(s)$ *formal* einer algebraischen Differenzendifferentialgleichung von der Art der Gleichung (2) im Hilfssatz 3 und die Anwendung des Hilfssatzes 3 beweist den Satz.

§ 2.

Beweis der Eigenschaft der Reihe $x + \frac{x^2}{2^s} + \frac{x^3}{3^s} + \ldots$ und analog gebauter Reihen, keiner algebraischen partiellen Differentialgleichung zu genügen.

Wir können nun den Beweis des von Hilbert in seinem Pariser Vortrag über „Mathematische Probleme“ als „wahrscheinlich“ bezeichneten Satzes erbringen:

Satz 2. *Die Funktion*

$$\zeta(x, s) = x + \frac{x^2}{2^s} + \frac{x^3}{3^s} + \cdots$$

genügt als Funktion der Variablen x, s keiner partiellen algebraischen Differentialgleichung.

Die Funktion $\zeta(x, s)$ genügt, wie man sofort nachrechnet, der von Hilbert angegebenen Funktionalgleichung:

$$x\frac{\partial\zeta(x,s)}{\partial x} = \zeta(x, s-1). \tag{6}$$

Aus dieser Funktionalgleichung erhält man sofort die allgemeineren

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\mu}\zeta(x, s-\nu) = \zeta(x, s-\mu-\nu) \tag{7}$$

und

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{\lambda}\zeta(x, s-\nu) = \frac{\partial^{\lambda}\zeta}{\partial s^{\lambda}}(x, s-\mu-\nu). \tag{8}$$

Es genüge nun $\zeta(x, s)$ einer partiellen algebraischen Differentialgleichung

$$\Phi(\zeta_{\mu,\lambda}(x, s)) = 0,$$

wo $\zeta_{\mu,\lambda}(x, s)$ für $\frac{\partial^{\mu}\partial^{\lambda}}{\partial x^{\mu}\partial s^{\lambda}}\zeta(x, s)$ gesetzt ist, und Φ ein Polynom in seinen Argumenten ist, das wir von x, s frei voraussetzen können, wegen der aus den Hilfssatz 2 geknüpften Folgerung.

Die Funktionalgleichung (6) gestattet nun, die Ableitungen von $\zeta(x, s)$ nach x durch die Größen $\zeta(x, s-\nu)$ sukzessive auszudrücken:

$$\frac{\partial^{\mu}\zeta(x,s)}{\partial x^{\mu}} = \frac{1}{x^{\mu}}\zeta(x, s-\mu) + c_{\mu,\mu-1}\zeta(x, s-\mu+1) + \ldots + c_{\mu,1}\zeta(x, s-1) \tag{9}$$

Hier sind die Koeffizienten c rationale Funktionen von x. Die Gleichungen (9) lassen sich offenbar nach den Größen $f(x, s-\nu)$ auflösen:

$$\zeta(x, s-\mu) = x^{\mu}\frac{\partial^{\mu}\zeta(x,s)}{\partial x^{\mu}} + \gamma_{\mu,\mu-1}\frac{\partial^{\mu-1}\zeta(x,s)}{\partial x^{\mu-1}} + \ldots + \gamma_{\mu,1}\frac{\partial\zeta(x,s)}{\partial x} \tag{10}$$

und γ sind ebenfalls rationale (sogar ganze) Funktionen von x. Differentiieren wir die Gleichungen (9) und (10) λ mal nach s, so erhalten wir

$$\frac{\partial^{\mu+\lambda}\zeta(x,s)}{\partial x^{\mu}\partial s^{\lambda}} = \frac{1}{x^{\mu}}\frac{\partial^{\lambda}\zeta(x,s-\mu)}{\partial s^{\lambda}} + c_{\mu,\mu-1}\frac{\partial^{\lambda}\zeta(x,s-\mu+1)}{\partial s^{\lambda}} + \ldots + c_{\mu,1}\frac{\partial^{\lambda}\zeta(x,s-1)}{\partial s^{\lambda}}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial^{\lambda}\zeta(x,s-\mu)}{\partial s^{\lambda}} = x^{\mu}\frac{\partial^{\mu+\lambda}\zeta(x,s)}{\partial x^{\mu}\partial s^{\lambda}} + \gamma_{\mu,\mu-1}\frac{\partial^{\mu+\lambda-1}\zeta(x,s)}{\partial x^{\mu-1}\partial s^{\lambda}} + \ldots + \gamma_{\mu,1}\frac{\partial^{\lambda+1}\zeta(x,s)}{\partial x\,\partial s^{\lambda}}, \tag{12}$$

da c und γ von s unabhängig sind. Und auch hier bilden für jeden Wert von λ die entsprechenden Gleichungssysteme (11) und (12) Auflösungen voneinander. Setzt man nun in das Polynom $\Phi(\zeta_{\mu,\lambda}(x, s))$ für die Ableitungen $\frac{\partial^{\mu+\lambda}\zeta(x,s)}{\partial x^{\mu}\partial s^{\lambda}}$ die Ausdrücke (11) ein, so entsteht ein Polynom

$$\psi\left(\frac{\partial^\varrho \zeta(x, s-\nu)}{\partial s^\varrho}\right)$$

in den Ausdrücken $\frac{\partial^\varrho \zeta(x, s-\nu)}{\partial s^\varrho}$, dessen Koeffizienten rationale Funktionen von x sind. Setzen wir in das Polynom ψ aber für seine Argumente die Ausdrücke (12) ein, so ergibt sich wieder Φ. Daher kann ψ nicht identisch verschwinden.

Wir multiplizieren nun das Polynom ψ mit einer solchen Potenz von x, daß ψ ganz auch in bezug auf x wird und dividieren durch eine möglichst große Potenz von $x-1$, falls das entstehende Polynom dann durch $x-1$ teilbar ist. Setzen wir dann $x=1$ für hinreichend große s, so entsteht aus $\zeta(x, s)$ die Dirichletsche Reihe

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots,$$

aus den Ausdrücken $\frac{\partial^\varrho \zeta(x, s-\nu)}{\partial s^\varrho}$ die Ausdrücke $\zeta^{(\varrho)}(s-\nu)$, und aus der Gleichung

$$\psi\left(\frac{\partial^\varrho \zeta(x, s-\nu)}{\partial s^\varrho}\right) = 0$$

eine algebraische Differenzendifferentialgleichung für $\zeta(s)$. Nach dem Satz 1 und den Bemerkungen, die wir an den Beweis des Hilfssatzes 3 geknüpft haben, genügt aber $\zeta(s)$ keiner algebraischen Differenzendifferentialgleichung. Damit ist der Satz 2 bewiesen.

Wir haben bei dem Beweis des Satzes 2 die Funktionalgleichung (6) benutzt, der $\zeta(x, s)$ genügt. Man kann aber durch direkte Verwendung derselben Methode, die uns zum Beweis des Hilfssatzes 3 führte, ein viel allgemeineres Resultat erhalten.

Es sei

$$F(x, s) = \sum \varphi_i(x)\, e^{-\lambda_i s} \qquad (\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots \text{ ad inf.})$$

eine in einem gewissen Bereiche der x-Ebene und einer gewissen s-Halbebene (ebenso wie ihre sämtliche partielle Ableitungen nach x) absolut und gleichmäßig konvergente Reihe, und es seien $\varphi_i(x)$ nicht identisch verschwindende Polynome in x, deren genaue Grade durch m_i bezeichnet werden mögen. Es genüge $F(x, s)$ einer algebraischen partiellen Differentialgleichung

$$\Phi(F_{\mu,\nu}(x, s)) = 0,$$

deren linke Seite als ein von x und s freies Polynom in den partiellen Ableitungen $F_{\mu,\nu}(x, s) = \frac{\partial^{\mu+\nu} F}{\partial x^\mu \partial s^\nu}$ angenommen werden kann. Bezeichnen wir allgemein die partiellen Ableitungen Φ nach $F_{\mu,\nu}$ durch $\Phi_{\mu,\nu}$, so

dürfen wir annehmen, daß $F(x, s)$ keiner der partiellen Differentialgleichungen

$$\Phi_{\mu,\nu}(F_{\sigma,\varrho}) = 0$$

genügt. Setzt man die Reihenentwicklung für $F(x, s)$ in $\Phi_{\mu,\nu}(F_{\sigma,\varrho})$ ein und ordnet das Resultat formal wie eine gewöhnliche Dirichletsche Reihe, so kann die so entstehende Reihenentwicklung

$$\sum \psi_i(x) e^{-\varkappa_i s} \tag{13}$$

nicht identisch verschwinden. Denn da die Reihe für $F(x, s)$ und ihre sämtlichen partiellen Ableitungen in einem gewissen Bereich absolut konvergieren, konvergiert jedenfalls auch die Reihe (13) absolut in einem gewissen Bereich und stellt in jenem Bereich die analytische Funktion $\Phi_{\mu\nu}(F_{\sigma,\varrho})$ dar. Es sei nun das erste Glied in (13) mit nicht identisch verschwindendem ψ_i etwa $\psi_1 e^{-\varkappa_1 s}$. Brechen wir die Reihe $F(x, s)$ bei einem hinreichend großen i ab, so ändert sich dieses erste Glied nicht.

Wir stellen nun für jedes in Betracht kommende Wertepaar von μ, ν solche erste Glieder auf und suchen den kleinsten der in ihnen auftretenden Exponenten $\varkappa_1$ — er sei etwa durch Λ bezeichnet und trete etwa bei Φ_{μ_τ,ν_τ} $(\tau = 1, 2, \ldots)$ auf. Die entsprechenden Polynome $\psi_1(x)$ seien durch $\psi^{(\tau)}(x)$, ihre genauen Grade durch $m^{(\tau)}$ bezeichnet.

Wir setzen nun

$$F(x, s) = A_i(x, s) + R_i(x, s),$$

$$A_i(x, s) = \sum_0^{i-1} \varphi_l(x) e^{-\lambda_l s}, \quad R_i(x, s) = \sum_i^{\infty} \varphi_l(x) e^{-\lambda_l s},$$

und tragen $A_i + R_i$ in Φ ein. So entsteht:

$$\Phi(F_{\sigma,\varrho}) = \Phi\left(\frac{\partial^{\sigma+\varrho} A_i}{\partial x^\sigma \partial s^\varrho}\right) + \sum_{\mu,\nu} \Phi_{\mu,\nu}\left(\frac{\partial^{\sigma+\varrho} A_i}{\partial x^\sigma \partial s^\varrho}\right) \frac{\partial^{\mu+\nu} R_i}{\partial x^\mu \partial s^\nu} + \sum\nolimits_2 \Phi_2\left(\frac{\partial^{\sigma+\varrho} A_i}{\partial x^\sigma \partial s^\varrho}\right) \Psi_2\left(\frac{\partial^{\mu+\nu} R_i}{\partial x^\mu \partial s^\nu}\right) + \ldots . \tag{14}$$

Hier sind $\Phi_2, \Phi_3, \ldots$ zweite, dritte, ... Ableitungen von Φ nach seinen Argumenten, $\Psi_2, \Psi_3, \ldots$ sind aber gewisse homogene Formen zweiter, dritter, ... Dimension in den Ableitungen von R_i.

Wir nehmen jetzt an, daß $\lim_{i=\infty} m_i = \infty$ *ist,* und suchen unter dieser Voraussetzung dasjenige Glied der Reihenentwicklung des zweiten, dritten usw. Bestandteils von (14), dessen Exponent möglichst klein ist. Dieses Glied ist für hinreichend große i

$$\sum_\tau \psi^{(\tau)}(x) \frac{\partial^{\mu_\tau} \varphi_l(x)}{\partial x^{\mu_\tau}} (-\lambda_i)^{\nu_\tau} e^{-(\lambda_i + \Lambda)s}, \tag{15}$$

ofern es nicht identisch in x verschwindet. Denn einerseits ist für andere Werte von μ, ν der Exponent des Anfangsgliedes von $\Phi_{\mu,\nu}\left(\frac{\partial^{\sigma+\varrho} A_i}{\partial x^\sigma \partial s^\varrho}\right)$ größer als Λ, andererseits ist der Exponent des Anfangsgliedes von $\Psi_2, \Psi_3, \ldots$ wenigstens gleich $2\lambda_i$ für hinreichend große i. Da nun $\Phi(F_{\sigma,\varrho})$ identisch verschwindet, so ist für jedes hinreichend große i das Glied (15) gleich 0, oder es hebt sich mit einem Glied aus $\Phi\left(\frac{\partial^{\sigma+\varrho} A_i}{\partial x^\sigma \partial s^\varrho}\right)$ weg. Das zweite wird nun sicher unendlich oft *nicht* der Fall sein, falls entweder: 1. die Exponenten λ_i besitzen keine endliche lineare Basis, oder 2. $\operatorname{Lim\,sup}_{i=\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}} = \infty$ ist. Unter jeder von diesen Annahmen muß also

$$\sum_\tau \psi^{(\tau)}(x) \frac{\partial^{\mu_\tau} \varphi_i(x)}{\partial x^{\mu_\tau}} (-\lambda_i)^{\nu_\tau} \tag{16}$$

für unendlich viele i verschwinden. Setzen wir in (16) den Koeffizient der höchsten Potenz von x gleich 0, so erhalten wir eine Gleichung von der Form

$$\Theta(m_i, \lambda_i) = 0, \tag{17}$$

wo Θ ein Polynom in m_i, λ_i mit konstanten von i unabhängigen und nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten ist.

Diese letzte Gleichung kann aber sicher nicht für unendlich viele i bestehen, falls entweder m_i rascher wächst als jede Potenz von λ_i, oder λ_i rascher wächst als jede Potenz von m_i, falls also

$$\text{entweder } \operatorname{Lim}_{i=\infty} \frac{\log m_i}{\log \lambda_i} = \infty \quad \text{oder} \quad \operatorname{Lim}_{i=\infty} \frac{\log \lambda_i}{\log m_i} = \infty$$

ist. Um zu einem schärferen Resultat zu gelangen, entwickeln wir die mit i unendlich werdenden Wurzeln m_i von (17) nach Potenzen von λ_i in der Umgebung der unendlich fernen Stelle. Wir erhalten endlich viele nach gebrochenen abnehmenden Potenzen von λ_i fortschreitende Reihenentwicklungen, die mit einer positiven Potenz von λ_i beginnen. Daraus folgt, daß unter den Häufungswerten von $\frac{\log m_i}{\log \lambda_i}$ endlich viele von 0 verschiedene rationale Zahlen vorkommen müssen. — Wir fassen das Resultat zusammen im

Satz 3. *Es sei*

$$F(x, s) = \sum \varphi_i(x) e^{-\lambda_i s} \qquad (\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots \text{ ad inf.})$$

eine in einem gewissen Bereiche der x-Ebene und einer gewissen s-Halbebene (ebensowie ihre sämtliche partielle Differentialquotienten nach x) absolut und gleichmäßig konvergente Reihe, und es seien $\varphi_i(x)$ Polynome in x mit

genauen Graden m_i, die mit wachsendem i über alle Grenzen wachsen. Es komme unter den Häufungswerten von $\frac{\log m_i}{\log \lambda_i}$ keine von 0 verschiedene rationale Zahl vor (dies ist sicher der Fall, falls $\lim_{i=\infty} \frac{\log m_i}{\log \lambda_i}$ gleich 0 oder ∞ ist). Ist eine von den beiden Bedingungen erfüllt:

1. *die Exponenten λ_i besitzen keine endliche lineare Basis,*
2. *es ist $\limsup_{i=\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}} = \infty$,*

so genügt $F(x, s)$ keiner algebraischen partiellen Differentialgleichung.

An diesem Satz ist besonders bemerkenswert, daß in ihm nur über Gradzahlen der Polynome $\varphi_i(x)$ Annahmen gemacht werden, nicht aber über ihre Koeffizienten, abgesehen von den Annahmen, die in den Konvergenzforderungen enthalten sind. Er läßt sich offenbar nach mehreren Richtungen verschärfen, insbesondere ist, wie man leicht beweisen kann, die Forderung der *absoluten* Konvergenz unwesentlich.

Da $\lim_{n=\infty} \frac{\log n}{\log \log n} = \infty$ ist, ist der Satz 2 im Satz 3 enthalten.

§ 3.

Über eine Klasse analytischer Funktionen von zwei Variablen.

Wir werden in diesem Paragraphen beweisen, daß die im vorigen Paragraphen betrachteten Funktionen sich nicht aus beliebigen analytischen Funktionen einer Variablen und algebraischen Funktionen mehrerer Variablen durch sukzessive Einschachtelungen erhalten lassen. Die bei diesem Beweis (und bei den weiteren Betrachtungen dieses Paragraphen) vorkommenden Eliminationen lassen sich vollständig streng und besonders einfach und übersichtlich mit Hilfe des folgenden sehr leicht durch körpertheoretische Betrachtungen beweisbaren Lemmas begründen:

Es genüge jede der $n+1$ Funktionen

$$f_1(x_1, \ldots, x_n), \quad f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \quad f_{n+1}(x_1, \ldots, x_n)$$

einer algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten Polynome in $x_1, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten aus einem beliebigen Körper K sind. Dann besteht zwischen den Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$ eine algebraische Relation in bezug auf den Körper K, d. h. es gibt ein solches Polynom $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$ mit Koeffizienten aus dem Körper K, die nicht sämtlich verschwinden, daß

$$\Phi(f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_{n+1}(x_1, \ldots, x_n)) = 0$$

identisch in x_i ist.

Wir werden nun den Begriff einer *uneigentlichen* Funktion von

2 Variablen x, s einführen, und zwar werden wir für die Zwecke des Beweises uneigentliche Funktionen verschiedenen *Ranges* unterscheiden.

Als eine uneigentliche Funktion *ersten* Ranges werden wir jede analytische Funktion bezeichnen, die nur von einer der beiden Variablen x, s abhängt. Als eine uneigentliche Funktion *zweiten* Ranges $\varphi(x, s)$ bezeichnen wir jede algebraische Funktion von mehreren uneigentlichen Funktionen ersten Ranges, die ein gemeinsames Existenzgebiet in x, s besitzen. Als eine uneigentliche Funktion *dritten* Ranges bezeichnen wir eine analytische Funktion $\psi(\varphi(x, s))$ von einer uneigentlichen Funktion $\varphi(x, s)$ zweiten Ranges, unter der Voraussetzung, daß das Existenzgebiet von ψ einen Teil des Wertgebietes von φ enthält, der dem gemeinsamen Existenzgebiet der in φ vorkommenden Funktionen ersten Ranges entspricht. Allgemein soll unter einer uneigentlichen Funktion $2n$-ten Ranges eine algebraische Funktion von mehreren uneigentlichen Funktionen $(2n-1)$-ten Ranges, unter einer uneigentlichen Funktion $(2n+1)$-ten Ranges eine analytische Funktion von einer uneigentlichen Funktion $2n$-ten Ranges verstanden werden. Dabei ist aber stets an der Voraussetzung festzuhalten, daß die Existenz- und die entsprechenden Wertgebiete sämtlicher vorkommenden Funktionen *zueinander passen*.

Jede analytische Funktion von zwei Variablen, die nicht eine uneigentliche Funktion von irgendeinem endlichen Rang ist, bezeichnen wir als *eigentliche Funktion von zwei Variablen*. Die uneigentlichen Funktionen ungeraden Ranges, die zum Aufbau einer uneigentlichen Funktion dienen, bezeichnen wir als deren *Komponenten*. Eine solche Komponente besteht aus einer analytischen Funktion in einer Variablen, in die statt der Variablen eine uneigentliche Funktion geraden Ranges eingesetzt ist. Diese analytische Funktion einer Variable bezeichnen wir als die *Hauptfunktion* der Komponente. So hat z. B. die uneigentliche Funktion vierten Ranges

$$\varphi(\psi(x)+\varphi(s))+\varphi(x)+\varphi(s)$$

vier Komponenten

$$\varphi(\psi(x)+\varphi(s)),\quad \psi(x),\quad \varphi(x),\quad \varphi(s)$$

mit den Hauptfunktionen $\varphi(z),\quad \psi(z),\quad \varphi(z),\quad \varphi(z)$.

Hat eine Komponente die Form $\varphi(\Phi(x, s))$, so bezeichnen wir die Funktion $\varphi^{(\varkappa)}(\Phi(x, s))$, wo $\varphi^{(\varkappa)}(z)$ die $\varkappa$-te Ableitung der Hauptfunktion $\varphi(z)$ ist, als die *$\varkappa$-te Derivierte der Komponente*. (Sie ist also nicht etwa mit einer der partiellen Ableitungen der Komponente identisch.)

Diese Unterscheidungen werden wichtig bei der Bildung der partiellen Ableitungen einer uneigentlichen Funktion. Es sei $\Phi(x, s)$ eine uneigentliche Funktion m-ten Ranges, und sie enthalte μ Komponenten. Bilden wir eine $\varkappa$-te partielle Ableitung von $\Phi(x, s)$, so ist sie offenbar eine

algebraische Funktion der ersten $\varkappa$ Derivierten aller Komponenten von Φ, also eine algebraische Funktion von höchstens $\varkappa\mu$ Argumenten. Folglich hängen $\frac{(\varkappa+1)(\varkappa+2)}{2}$ erste partielle Ableitungen von Φ bis zur $\varkappa$-ten Ordnung algebraisch höchstens von $\varkappa\mu$ Argumenten ab. Und da für ein hinreichend großes $\varkappa$ die Zahl $\frac{(\varkappa+1)(\varkappa+2)}{2}$ größer als $\varkappa\mu$ ist, so folgt hieraus nach unserem Lemma, daß jede uneigentliche Funktion von 2 Variablen einer algebraischen partiellen Differentialgleichung genügt. Und hieraus folgt insbesondere der

Satz 4. *Sowohl die Funktion*

$$\zeta(x, s) = \frac{x}{1^s} + \frac{x^2}{2^s} + \frac{x^3}{3^s} + \cdots$$

als auch allgemeiner jede Funktion, die durch eine den Bedingungen des Satzes 3 genügende Reihe dargestellt ist, ist eine eigentliche Funktion von 2 Variablen, läßt sich also nicht durch Verkettung von analytischen Funktionen einer Variable mit algebraischen Funktionen mehrerer Variablen gewinnen.

Wir können indessen darüber hinaus noch zeigen, daß die Funktionen, von denen im Satze 4 die Rede ist, nicht einmal einer partiellen Differentialgleichung genügen können, deren Koeffizienten uneigentliche Funktionen von x und s sind. Genauer gilt der

Satz 5. *Genügt eine analytische Funktion $f(x, s)$ von zwei Variablen einer partiellen Differentialgleichung, deren linke Seite ein Polynom in der unbekannten Funktion und ihren Ableitungen ist mit Koeffizienten, die uneigentliche Funktionen von zwei Variablen sind, so genügt sie auch einer solchen partiellen Differentialgleichung, deren linke Seite ein Polynom in der unbekannten Funktion und ihren Ableitungen mit Zahlenkoeffizienten ist.*

Es sei die Differentialgleichung, — unter $f_{i,k}$ allgemein $\frac{\partial^{i+k} f(x, s)}{\partial x^i \partial s^k}$ verstanden, —

$$\Phi(f_{i,k}) = 0, \tag{18}$$

der $f(x, s)$ genügt. von der m-ten Ordnung, und es sei Φ ein Polynom in bezug auf f und die partiellen Ableitungen von f, dessen Koeffizienten uneigentliche Funktionen von x, s sind. Es möge zugleich Φ eine solche Differentialgleichung von kleinstmöglicher Ordnung sein. Die Anzahl der verschiedenen Komponenten, die in den Koeffizienten von Φ auftreten, bezeichnen wir durch μ. Es sei $f_{i,m-i}$ eine in Φ wirklich auftretende Ableitung m-ter Ordnung, bei der i möglichst groß gewählt sei. Den partiellen Differentialquotienten von Φ nach dieser Ableitung bezeichnen

wir durch S. Da wir m möglichst klein angenommen haben, ist S von 0 verschieden.

Bilden wir nun die $\varkappa + 1$ Gleichungen, die aus (18) durch $\varkappa$-malige „totale" Differentiation nach x und s hervorgehen,

$$\frac{d^\varkappa \Phi}{dx^\varkappa} = 0, \quad \frac{d^\varkappa \Phi}{dx^{\varkappa-1} ds} = 0, \ldots, \quad \frac{d^\varkappa \Phi}{ds^\varkappa} = 0,$$

so haben sie die Gestalt

$$S f_{i+\varkappa, m-i} = \varphi_1(f_{e,n}), \; S f_{i+\varkappa-1, m-i+1} = \varphi_2(f_{e,n}), \ldots, S f_{i, m-i+\varkappa} = \varphi_{\varkappa+1}(f_{e,n}),$$

wo die φ Polynome in solchen $f_{e,n}$ sind, deren Ordnungen $e + n$ höchstens gleich $m + \varkappa$ sind. Von den $f_{e,n}$ aber, deren Ordnungen gleich $m + \varkappa$ sind, enthält $\varphi_{\varkappa+1}$ nur solche mit $e < i$, $\varphi_\varkappa$ nur solche mit $e < i + 1$, ..., φ_1 nur solche mit $e < i + \varkappa$. Daher können wir von den Gleichungen (19) durch sukzessive Substitutionen zu den Gleichungen von der Form gelangen

$$S^l f_{i+\varkappa, m-i} = \psi_1(f_{e,n}), \; S^l f_{i+\varkappa-1, m-i+1} = \psi_2(f_{e,n}), \ldots, S^l f_{i, m-i+\varkappa} = \psi_{\varkappa+1}(f_{e,n}).$$

Hier sind die Argumente $f_{e,n}$ der ψ partielle Ableitungen von f bis zur $(m + \varkappa)$-ten Ordnung, von den Ableitungen $(m + \varkappa)$-ter Ordnung kommen jedoch in den ψ die Ableitungen $f_{e,n}$, bei denen $e \geqq i$, $n \geqq m - i$ ist, *nicht* vor, und die Gleichungen (20) dienen gerade dazu, diese $f_{e,n}$ durch die übrigen partiellen Ableitungen m-ter Ordnung und die partiellen Ableitungen niedrigerer Ordnung auszudrücken. Lassen wir $\varkappa$ alle ganzen Werte durchlaufen von 1 bis $\varkappa'$ und benutzen sukzessive die Gleichungen (20) für kleinere Werte von $\varkappa$, so kommen wir endlich zu den Ausdrücken, die alle $f_{e,n}$ mit $m < e + n \leqq m + \varkappa'$, $e \geqq i$, $n \geqq m - i$ durch die übrigen partiellen Ableitungen bis zur $(m + \varkappa')$-ten Ordnung rational darzustellen gestatten. Bezeichnen wir die $\frac{\varkappa'(\varkappa'+3)}{2}$ Ableitungen $f_{e,n}$ mit $m < e + n \leqq m + \varkappa'$, $e \geqq i$, $n \geqq m - i$ in irgendeiner Reihenfolge mit $p_1, p_2, \ldots$, die übrigen partiellen Ableitungen von f bis zur $(m + \varkappa')$-ten Ordnung mit $q_1, q_2, \ldots$, so haben wir Darstellungen von der Form

$$S^l p_t = \chi_t(q_g) \qquad \left(t = 1, 2, \ldots, \frac{\varkappa'(\varkappa'+3)}{2}\right). \tag{21}$$

Hier sind χ und S Polynome in den Argumenten q_g mit Koeffizienten, die algebraisch in den Derivierten verschiedener Komponenten der Koeffizienten von Φ bis zur $\varkappa'$-ten Ordnung sind, also in höchstens $\mu(\varkappa' + 1)$ Größen. Fassen wir die Größen q_g als Unbestimmte auf und bezeichnen den durch ihre Adjunktion zum Körper aller komplexer Zahlen hervorgehenden Körper durch K, die in S und den χ vorkommenden Derivierten aller Komponenten der Koeffizienten von Φ und diese Komponenten selbst in irgendeiner Reihenfolge durch $x_1, x_2, \ldots$, und nehmen wir

$x' > 2\mu$ an, so läßt sich das obige Lemma anwenden, und wir sehen, daß zwischen den Funktionen $\frac{\chi_t}{S}$ der x eine identische Relation mit Koeffizienten aus dem Körper K besteht. Daher besteht zwischen den p_t eine Relation

$$\Psi(p_t, q_g) = 0, \tag{22}$$

deren linke Seite ein Polynom in den p_t ist mit nicht identisch verschwindenden Koeffizienten, die rationale Funktionen der q_g sind. Wir können nun diese Koeffizienten offenbar auch als Polynome in den q_g annehmen und erhalten aus (22) eine algebraische partielle Differentialgleichung für $f(x, s)$. — Es liegt nahe zu vermuten, daß die Sätze 4 und 5 auch dann bestehen bleiben, wenn wir die Definition der uneigentlichen Funktionen in der Richtung erweitern, daß die zu ihrem Aufbau benutzten Funktionen einer Variablen nur stetig, nicht aber analytisch zu sein brauchen, wenn nur die uneigentlichen Funktionen selbst analytisch sind; daß also die Funktionen des Satzes 4 sich nicht aus beliebigen stetigen Funktionen einer Variablen und algebraischen Funktionen mehrerer Variablen aufbauen lassen. Es ist mir jedoch nicht gelungen, einen lückenlos strengen Beweis hierfür zu erbringen.

§ 4.

Der Hauptsatz für beliebige konvergente Dirichletsche Reihen und einige Erweiterungen des Hauptsatzes.

Satz 6. *Genügt die durch eine konvergente Dirichletsche Reihe dargestellte Funktion*

$$\varphi(s) = \sum a_i e^{-\lambda_i s}$$

einer algebraischen Differenzendifferentialgleichung, so besitzt das System der Exponenten λ_i eine endliche lineare Basis.

Beweis. Genügt die analytische Funktion $\varphi(s)$ einer algebraischen Differenzendifferentialgleichung, so genügt sie nach dem Hilfssatz 1 auch einer solchen

$$F(f^{(\nu)}(s + h_\mu)) = 0, \tag{23}$$

in der F ein von s unabhängiges Polynom in seinen Argumenten ist. Es wird daher genügen, um unseren Satz zu beweisen, zu zeigen, daß die Reihe $\varphi(s)$ auch *formal* der Gleichung (23) genügt, da dann die Behauptung aus dem Hilfssatz 3 folgt. Nehmen wir nun an, daß die Dirichletsche Reihe

$$F(\varphi^{(\nu)}(s + h_\mu)), \tag{24}$$

ie sich durch das formale Umrechnen ergibt, nicht identisch verschwindet, nd es sei $a e^{-\lambda s}$ ihr erstes nicht verschwindendes Glied. Zur Bildung es Exponenten λ in (24) und der Exponenten der vorhergehenden Glieder on (24), die sich weggehoben haben, haben offenbar nur endlich viele xponenten λ_i von $\varphi(s)$ beigetragen. Z. B. sind bereits alle Exponenten $_i > n|\lambda_0| + |\lambda|$, wo n den Gesamtgrad von F bedeutet, sicher ohne eden Einfluß. Ändern wir daher $\varphi(s)$ in solchen Gliedern irgendwie ab, enen $\lambda_i > n|\lambda_0| + |\lambda|$ entsprechen, so ist das Anfangsglied des Resultats er Einsetzung der so abgeänderten Reihe wieder $a e^{-\lambda s}$. Brechen wir die eihe $\varphi(s)$ bei irgendeinem hinreichend großen λ_i ab, so ist die Differenz wischen $\varphi(s)$ und dem entstehenden Abschnitt

$$A_i(s) = \sum_0^{i-1} a_i e^{-\lambda_p s}$$

on $\varphi(s)$ eine Funktion $R_i(s)$, die sich wegen der gleichmäßigen Konergenz Dirichletscher Reihen in der Form schreiben läßt

$$e^{-\lambda_i s} S(s),$$

o $\lim_{s=\infty} S(s) = a_i$ ist. — Hier und im folgenden ist die Bezeichnung $\lim_{s=\infty}$ o zu verstehen, daß dabei s durch reelle positive Werte läuft. — Und benso läßt sich dann schreiben

$$\varphi^{(\nu)}(s + h_\mu) = A_i^{(\nu)}(s + h_\mu) + e^{-\lambda_i s} S^{(\nu,\mu)}(s), \tag{25}$$

o $\lim_{s=\infty} S^{(\nu,\mu)}(s)$ eine endliche Konstante ist. Setzt man jetzt in die Gleichung (23) $\varphi(s) = A_i(s) + e^{-\lambda_i s} S(s)$ und die Ausdrücke (25) ein, nd entwickelt nach dem Taylorschen Lehrsatz, so entsteht eine Gleichung on der Form

$$F(A_i^{(\nu)}(s + h_\mu)) + e^{-(\lambda_i - n|\lambda_0|)s} \Phi(s) = 0, \tag{26}$$

o $\lim_{s=\infty} \Phi(s)$ ***endlich*** ist. Andererseits läßt sich $F(A_i^{(\nu)}(s + h_\mu))$ in der orm schreiben

$$e^{-\lambda s} P(s),$$

o $\lim_{s=\infty} P(s) = a \neq 0$ ist, sofern $\lambda_i > |\lambda| + n|\lambda_0|$ ist. Setzen wir aber ies in (26) ein, multiplizieren mit $e^{\lambda s}$ und lassen dann s gegen $+\infty$ onvergieren, so erhalten wir, sobald $\lambda_i > |\lambda| + n|\lambda_0|$ ist, $a = 0$, was der nnahme widerspricht. W. z. b. w.

Kehren wir noch einmal zum Beweis des Hilfssatzes 3 im § 1 zurück nd namentlich zur Gleichung (3). Wir hatten aus ihr gefolgert, daß ir jedes hinreichend große λ_i in $F(A_i^{(\nu)}(s + h_\mu))$ ein Glied mit dem

Exponenten $A_1 + \lambda_i$ vorkommt. Da aber F vom Gesamtgrade n ist, entsteht jeder Exponent, der bei den Gliedern von $F(A_i^{(\nu)}(s + h_\mu))$ auftritt, aus höchstens n Zahlen durch Addition, von denen jede einer der Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{i-1}$ gleich ist. Wir erhalten daher für λ_i die Relation $|A_1 + \lambda_i| \leqq n|\lambda_{i-1}|$, aus der, da A_1 konstant ist,

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{i=\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}} \leqq n$$

folgt. Wir gelangen zu dem Satze:

Satz 7. *Eine konvergente Dirichletsche Reihe*

$$\sum a_i e^{-\lambda_i s},$$

bei der

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{i=\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}} = \infty$$

ist, kann keiner algebraischen Differenzendifferentialgleichung genügen.

Wir fassen nun wieder die Gleichung (3) des Beweises des Hilfssatzes 3 ins Auge, nehmen jetzt jedoch an, daß alle Zahlen $h_\mu = 0$ sind, daß also die Gleichung $F(f^{(\nu)}(s + h_\mu)) = 0$ sich auf die Form $F(f^{(\nu)}(s)) = 0$ reduziert und daher zu einer *Differential*gleichung wird. Dann muß der Ausdruck, der aus (4) entsteht, wenn wir noch für b_{ϱ_t, σ_t} einfach b_{ϱ_t} setzen,

$$a_i e^{-(A_1+\lambda_i)s} \sum b_{\varrho_t}(-\lambda_i)^{\varrho_t} \tag{27}$$

in $F(A_i^{(\nu)}(s))$ für hinreichend große i enthalten sein, daher muß der Koeffizient

$$a_i \sum b_{\varrho_t}(-\lambda_i)^{\varrho_t}$$

von (27) sich rational mit rationalen Koeffizienten durch die Koeffizienten von F, durch $a_0, \ldots, a_{i-1}, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}$ ausdrücken lassen. Da aber sich alle λ_i ganzzahlig linear durch endlich viele unter ihnen ausdrücken lassen, so können wir alle a_i sukzessive durch die Koeffizienten von F, durch b_{ϱ_t} und eine endliche Anzahl gewisser Zahlen unter a_i und λ_i, also durch *endlich viele Zahlen* rational mit rationalen Koeffizienten darstellen. — Wir werden sagen, daß ein System von Zahlen $k_1, k_2, \ldots$ *eine endliche Basis* besitzt, wenn es endlich viele solche Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r$ gibt, daß sich alle k_i als rationale Funktionen mit rationalen Koeffizienten von $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_r$ darstellen lassen. Das System der Zahlen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_r$ wollen wir dann als *Basis* der Zahlen k_i bezeichnen. Mit Hilfe dieser Bezeichnung können wir dann den Satz aussprechen:

Satz 8. *Eine Dirichletsche Reihe*

$$\sum a_i e^{-\lambda_i s},$$

bei der das System der Koeffizienten a_i keine endliche Basis besitzt, genügt keiner algebraischen Differentialgleichung.

Die Anwendung dieses Satzes wird dadurch vereinfacht, daß es im Falle der Existenz einer Basis genügt, für die Zahlen der Basis des Systems der a_i gewisse *unter den a_i selbst* zu nehmen. Es gilt nämlich der

Hilfssatz 4. *Besitzt ein System von Zahlen $k_1, k_2, \ldots$ eine endliche Basis, so besitzt es auch eine endliche Basis, deren Elemente in diesem System selbst enthalten sind.*

Der Beweis erfordert den Nachweis der Ausführbarkeit gewisser Eliminationen, der auf direktem Wege mit Hilfe der allgemeinen Eliminationstheorie nur sehr umständlich zu führen wäre. Diese Schwierigkeiten lassen sich aber umgehen, wenn man gewisse körpertheoretische Betrachtungen heranzieht. Wir stützen uns dabei auf einige Sätze aus der grundlegenden Arbeit von E. Steinitz: *Algebraische Theorie der Körper*[7]), und namentlich aus dem § 22 der Steinitzschen Arbeit.

Man lege einen Körper $\mathfrak{K}$ zugrunde und betrachte im übrigen nur Größen, die in einem festen $\mathfrak{K}$ umfassenden Körper $\mathfrak{L}$ (einer „Erweiterung" von $\mathfrak{K}$) enthalten sind. Eine Größe a von $\mathfrak{L}$ nennt man *algebraisch* in bezug auf $\mathfrak{K}$, wenn sie Wurzel eines Polynoms in einer Variablen mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$ ist. Ist $\mathfrak{S}$ ein System von Größen, so nennt man eine Größe a *algebraisch abhängig* von $\mathfrak{S}$ (in bezug auf $\mathfrak{K}$), wenn a in bezug auf den Körper $\mathfrak{K}(\mathfrak{S})$ algebraisch ist, der aus $\mathfrak{K}$ durch Adjunktion aller Größen von $\mathfrak{S}$ entsteht. Ein Größensystem $\mathfrak{S}'$ nennt man algebraisch abhängig von $\mathfrak{S}$, wenn jede Größe von $\mathfrak{S}'$ von $\mathfrak{S}$ algebraisch abhängt. Es gilt nun der Satz: Hängt $\mathfrak{S}_3$ von $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_2$ von $\mathfrak{S}_1$ algebraisch ab, so hängt $\mathfrak{S}_3$ von $\mathfrak{S}_1$ algebraisch ab. Daher sind wir berechtigt, zwei Systeme $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ *äquivalent* zu nennen, wenn jedes vom anderen algebraisch abhängt. Ein System $\mathfrak{S}$, welches keinem echten Teil von sich äquivalent ist und nicht aus einer in bezug auf $\mathfrak{K}$ algebraischen Größe besteht, nennt man *irreduzibel*. Wir werden nun folgende Sätze zu benutzen haben:

1) *Ein irreduzibles System $\mathfrak{V}$, welches von einem endlichen System $\mathfrak{U}$ algebraisch abhängt, kann nicht mehr Elemente enthalten als dieses*[8]).

2) *Es seien $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ endliche irreduzible Systeme von m bzw. n Größen, und es sei $\mathfrak{V}$ algebraisch abhängig von $\mathfrak{U}$. Dann sind im Falle $m = n$ die Systeme $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ äquivalent, im Falle $n < m$ ist aber $\mathfrak{U}$ einem irreduziblen System äquivalent, welches aus $\mathfrak{V}$ und $m - n$ Größen von $\mathfrak{U}$ besteht*[9]).

[7]) Crelles Journal für Mathematik, **137** (1910), S. 167–309.
[8]) l. c. S. 292.
[9]) l. c. S. 291–292.

Bevor wir weiter gehen, wollen wir aus 1) eine Folgerung ziehen, die wir bereits angewandt haben und die auch in den folgenden Paragraphen wiederholt zu verwenden sein wird. Dies ist das folgende

Lemma. *Zwischen beliebigen $n+1$ algebraischen Funktionen der n Variablen $x_1, \ldots, x_n$*

$$f_1(x_1, \ldots, x_n), \ \ldots, \ f_{n+1}(x_1, \ldots, x_n)$$

mit Koeffizienten aus einem Körper K besteht stets eine algebraische Relation mit Koeffizienten aus K, d. h. es gibt ein solches Polynom $\Phi(y_1, \ldots, y_{n+1})$ mit Koeffizienten aus K, die nicht alle 0 sind, daß die Größe

$$\Phi(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ f_2(x_1, \ldots, x_n), \ \ldots, \ f_{n+1}(x_1, \ldots, x_n))$$

für unbestimmte x verschwindet[10]).

In der Tat, das System $\mathfrak{B}$ der $n+1$ Größen $f_1(x_i), \ldots, f_{n+1}(x_i)$ hängt algebraisch vom System $\mathfrak{U}$ der n Größen $x_1, \ldots, x_n$ in bezug auf K ab, kann daher nach 1. nicht irreduzibel sein, da es mehr als n Größen enthält. Es ist daher einem echten Teil von sich äquivalent, etwa

$$f_1(x_i), \ f_2(x_i), \ \ldots, \ f_n(x_i). \tag{28}$$

Folglich hängt $f_{n+1}(x_i)$ vom System (28) algebraisch ab, genügt also einer Gleichung

$$\Phi(z, f_1, \ldots, f_n) \equiv a_0(f_k) z^l + a_1(f_k) z^{l-1} + \ldots + a_l(f_k) = 0,$$

in der $a_0(f_k), a_1(f_k), \ldots, a_l(f_k)$ Größen des Körpers $K(f_1, \ldots, f_n)$ sind. Wir können sie nun als Polynome in $f_1, \ldots, f_n$ annehmen, indem wir nötigenfalls Φ mit einem Polynom in $f_1, \ldots, f_n$ multiplizieren. Sind aber $a_0, \ldots, a_l$ Polynome in den f_k, so hat das Polynom $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$ die im Lemma behauptete Eigenschaft.

Wir kehren nun zum Beweise des Hilfssatzes 4 zurück und nehmen an, daß das System (k_i) eine endliche Basis aus den Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\alpha$ besitzt. Den Körper der rationalen Zahlen bezeichnen wir durch R und legen ihn den folgenden Betrachtungen zugrunde, als den Körper $\mathfrak{K}$ der Steinitzschen Sätze. Sind alle Zahlen $\varkappa$ algebraisch, so ist der Körper $R(k_i)$ im endlichen Körper $R(\varkappa_i)$ enthalten, ist daher mit einem seiner Teiler, den wir etwa mit R_1 bezeichnen wollen, identisch. Ist etwa α eine primitive Zahl von R_1, so muß sich α durch endlich viele k_i rational mit rationalen Koeffizienten ausdrücken, etwa durch $k_1, k_2, \ldots, k_r$. Da aber auch jedes k_i sich durch α rational mit rationalen Koeffizienten

[10]) Hieraus folgt natürlich sofort, daß $f_1, \ldots, f_{n+1}$ auch im gewöhnlichen Sinne als analytische Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ aufgefaßt, abhängig sind.

ausdrückt, bilden die Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_r$ eine endliche Basis des Systems (k_i). — Sind aber nicht alle $\varkappa_i$ algebraisch, so ist $\mathfrak{S} = (\varkappa_i)$ entweder irreduzibel oder einem irreduziblen Teilsystem Σ äquivalent, welches aus b Zahlen $\varkappa_i$ bestehen mag, etwa aus $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_b$. Dann sind alle übrigen Zahlen $\varkappa_i$, sofern nicht $a = b$ ist, algebraisch in bezug auf $R(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_b)$.

Andererseits muß auch das System (k_i) einem aus endlich vielen Zahlen k_i bestehenden irreduziblen System äquivalent sein, sofern nicht alle k_i algebraische Zahlen sind. Denn ist etwa $T = (k_1, k_2, \ldots, k_c)$ ein irreduzibles Teilsystem der k_i, so ist T von Σ algebraisch abhängig, und daher ist nach 1) $c \leqq b$. Ist aber T so gewählt, daß $c > 0$ und den größtmöglichen Wert hat, so ist jedes k_i algebraisch abhängig von T. Denn das System (T, k_i) besteht aus $c + 1$ Größen und muß daher einem irreduziblen Teilsystem T' äquivalent sein, von dem dann k_i algebraisch abhängig ist. Andererseits ist T von (T, k_i) algebraisch abhängig, daher auch von T'. Dann muß nach 1) die Anzahl der Größen von T' gleich c sein, nach 2) müssen T und T' äquivalent sein, daher ist k_i auch von T algebraisch abhängig, und T mit (k_i) äquivalent.

Das System T ist, falls nicht alle k_i algebraische Zahlen sind, von Σ algebraisch abhängig. Daher ist dann 2) anwendbar, und das System Σ ist einem System $(k_1, k_2 \ldots, k_c, y_1, y_2, \ldots, y_{b-c})$ äquivalent. Wir wollen $k_1, k_2, \ldots, k_c$ lieber durch $x_1, x_2, \ldots, x_c$ bezeichnen, wobei diese Größen gar nicht aufzutreten brauchen, falls alle k_i algebraische Zahlen sind, und c also $= 0$ ist. Adjungieren wir zum Körper $R(x_1, \ldots, x_c, y_1, \ldots, y_{b-c})$ alle $\varkappa_i$, so entsteht eine endliche algebraische Erweiterung K, in der alle Größen k_i enthalten sind. Dabei sind aber k_i bereits in bezug auf $R(x_1, \ldots, x_c)$ algebraisch. Ist nun $b = c$, so treten keine Größen y auf, und alle k_i sind in einem endlichen Körper über $R(x_1, \ldots, x_c)$ enthalten, bestimmen daher selbst einen endlichen Körper über $R(x_1, \ldots, x_c)$, dessen irgendeine primitive Größe durch β bezeichnet werden mag. Dann drückt sich β rational mit rationalen Koeffizienten durch endlich viele k_i und $x_1, \ldots, x_c$ aus. Andererseits drücken sich alle k_i rational mit rationalen Koeffizienten durch β und $x_1, \ldots, x_c$ aus. Und da $x_1, \ldots, x_c$ selbst gewisse unter den k_i sind, so ist in diesem Falle der Hilfssatz 4 bewiesen.

Es sei jetzt $b > c$. Adjungieren wir alle k_i zum Körper $R(x_1, \ldots, x_c)$, bzw., falls $c = 0$ ist, zum Körper R, so entsteht ein algebraischer Körper K über $R(x_1, \ldots, x_c)$, und es genügt zu beweisen, daß K endlich in bezug auf $R(x_1, \ldots, x_c)$ ist. Denn dann drücken sich alle k_i durch eine primitive Größe γ von K und $x_1, \ldots, x_c$ rational mit rationalen Koeffizienten aus, und da $x_1, \ldots, x_c$ gewisse unter den k_i sind, ist dann der Hilfssatz 4 bewiesen. Ist nun aber m der Grad von K in bezug auf $R(x_1, \ldots, x_c,$

$y_1, \ldots, y_{b-c}$), so behaupten wir, daß der Grad von K in bezug auf $R(x_1, \ldots, x_c)$ höchstens m ist, d. h. daß zwischen $m+1$ beliebigen Größen

$$k', k'', \ldots, k^{(m+1)} \tag{29}$$

von K eine Relation mit nicht sämtlich verschwindenden $u_i(x_i)$ besteht:

$$u_1(x_i)k' + u_2(x_i)k'' + \ldots + u_{m+1}(x_i)k^{(m+1)} = 0, \tag{30}$$

in der die Größen $u_i(x_i)$ aus $R(x_1, \ldots, x_c)$ rationale Funktionen der x mit rationalen Koeffizienten sind, bzw. rationale Zahlen, falls $c = 0$ ist. Da der Grad von K gleich m ist und die Zahlen (29) dem Körper K angehören, besteht eine Relation

$$v_1(x_i, y_i)k' + v_2(x_i, y_i)k'' + \ldots + v_{m+1}(x_i, y_i)k^{(m+1)} = 0, \tag{31}$$

in der $v_i(x_i, y_i)$ rationale Funktionen in den x_i, y_i mit rationalen Koeffizienten sind und nicht sämtlich verschwinden. Wir können offenbar alle v_i als *Polynome* in den x_i, y_i annehmen. Kommen in ihnen y_i gar nicht vor, so ist unsere Behauptung bewiesen. Enthalten aber die v auch gewisse y, so ordnen wir (31) rein formal nach Potenzprodukten der y um. So erhalten wir eine Gleichung von der Form

$$\sum_j Y_j(w_1^{(j)}(x_i)k' + w_2^{(j)}(x_i)k'' + \ldots + w_{m+1}^{(j)}(x_i)k^{(m+1)}) = 0, \tag{32}$$

in der nicht alle $w_i^{(j)}(x_i)$ verschwinden. Besteht nun keine Relation von der Form (30), so sind in (32) nicht alle Koeffizienten verschiedener Potenzprodukte der y gleich 0. Dividieren wir (32) durch den größten gemeinsamen Teiler aller Potenzprodukte Y_j, so muß nach Division wenigstens ein y in (32) wirklich vorkommen, da in (32) sonst nur ein Y vor der Division auftreten würde, was eine Gleichung von der Form (30) nach sich zieht. Es würde also ein gewisses Polynom in $y_1, \ldots, y_{b-c}$, dessen Koeffizienten algebraisch von $x_1, \ldots, x_c$ abhängen und nicht sämtlich 0 sind, verschwinden. Dies widerspricht aber der Annahme, daß das System $x_1, \ldots, x_c, y_1, \ldots, y_{b-c}$ irreduzibel ist. Damit ist der Hilfssatz 4 vollständig bewiesen[11]).

Aus diesem Hilfssatz ergibt sich folgende Verschärfung des Satzes 8:

Satz 8′. *Gibt es ein solches Teilsystem $\mathfrak{S}$ der Koeffizienten a_i einer Dirichletschen Reihe*

$$\sum a_i e^{-\lambda_i s}, \tag{33}$$

[11]) Die im letzten Teil des Beweises bewiesene Tatsache ist im wesentlichen mit einem von Herrn I. Schur, Berliner Sitzungsber. (1911), S. 619 ff. bewiesenen Hilfssatz identisch.

ssen Zahlen sich nicht durch endlich viele, demselben Teilsystem an-hörende Zahlen rational mit rationalen Koeffizienten ausdrücken lassen, genügt diese Reihe keiner algebraischen Differentialgleichung.

Insbesondere genügt also (33) keiner algebraischen Differentialgleichung, nn unter den Zahlen a_i unendlich viele algebraische Zahlen vorkommen, in keinem endlichen algebraischen Zahlkörper alle zugleich enthalten d, z. B. unendlich viele verschiedene Einheitswurzeln.

§ 5.

Über den Begriff der algebraisch-transzendenten Funktion.

Um die in den vorhergehenden Paragraphen gefundenen Resultate iter ausbauen und auch auf Potenzreihen anwenden zu können, müssen r zuerst auf allgemeine Eigenschaften von Funktionen einer Variablen ngehen, die algebraischen Differentialgleichungen genügen. Mit E. H. Moore rden wir solche Funktionen, die einer algebraischen Differentialgleichung nügen, als *algebraisch-transzendente Funktionen* bezeichnen[12]).

Als einen *Rationalitätsbereich* R wollen wir in diesem Paragraphen nen Körper von analytischen Funktionen verstehen, die alle einen geeinsamen Existenzbereich $G(R)$ besitzen, in welchem jede von ihnen bis f isolierte Punkte regulär analytisch ist. Außerdem wollen wir annehmen, ß mit jeder in R vorkommenden Funktion auch ihre sämtlichen Abtungen in R vorkommen. Eine in $G(R)$ existierende Funktion $f(x)$, e einer Differentialgleichung

$$\Phi(f^{(i)}) = 0$$

nügt, wo Φ ein Polynom in f und den Ableitungen von f mit Koeffinten aus R ist, nennen wir *algebraisch-transzendent in bezug auf* R.

Es sei nun $g(x)$ eine algebraisch-transzendente Funktion in bezug f R, $f(x)$ eine algebraisch-transzendente Funktion in bezug auf den tionalitätsbereich $R(g)$, der aus R durch Adjunktion von $g(x)$ und mtlichen Ableitungen von $g(x)$ hervorgeht. Wir behaupten, daß *dann* $x)$ *algebraisch-transzendent in bezug auf* R *ist.* Es genüge $g(x)$ einer fferentialgleichung m-ter Ordnung

$$\Phi(g^{(i)}) = 0, \tag{4}$$

ren linke Seite ein Polynom in $g, g', \ldots, g^{(m)}$ mit Koeffizienten aus R ist, er keiner solchen Differentialgleichung niedrigerer Ordnung oder derselben dnung und vom niedrigeren Grad in $g^{(m)}$. Dann läßt sich durch sukssive Differentiation der Gleichung (34) jede der weiteren Ableitungen

[12]) Math. Ann., 48 (1897), S. 49.

$g^{(m+1)}, g^{(m+2)}, \ldots$ von g rational mit Koeffizienten aus R durch $g, g', \ldots, g^{(m}$ darstellen, wobei als Nenner eine Potenz von $S = \frac{\partial \Phi}{\partial g^{(m)}}$ auftritt, dieses letzte Ausdruck aber sicher nicht identisch verschwindet. Es genüge nu $f(x)$ einer Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$\psi(f^{(i)}) = 0, \tag{35}$$

wo $\psi(f^{(i)})$ ein Polynom in $f, f', \ldots, f^{(n)}$ mit Koeffizienten aus $R(g)$ ist und keiner Differentialgleichung niedrigerer Ordnung, oder n-ter Ordnun und vom niedrigeren Grad in bezug auf $f^{(n)}$. Daher ist $T = \frac{\partial \psi}{\partial f^{(n)}}$ siche von 0 verschieden. Durch sukzessive Differentiation der Gleichung (35 kann man alle weiteren Ableitungen $f^{(n+1)}, f^{(n+2)}, \ldots$ rational durc $f, f', \ldots, f^{(n)}$ und $g, g', \ldots$ ausdrücken, wobei als Nenner nur eine Poten von T auftritt. Setzt man für $g^{(m+1)}, g^{(m+2)}, \ldots$ ihre Ausdrücke ein, s kann man alle Ableitungen $f^{(n+1)}, f^{(n+2)}, \ldots$ rational durch $f, f', \ldots, f^{(n}$ $g, g', \ldots, g^{(m)}$ mit Koeffizienten aus R ausdrücken, wobei als Nenner nu Potenzenprodukte von T und S auftreten. Die Anwendung des Lemma aus § 3 beweist die Existenz einer rationalen Relation mit Koeffiziente aus R zwischen einer hinreichend großen Anzahl der Ableitungen von f Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Es seien nun $g_1, g_2, \ldots, g_k$ in bezug auf R algebraisch-transzendent Funktionen, und f sei algebraisch-transzendent in bezug auf $R(g_1, g_2, \ldots, g_k$ Dann ist nach dem soeben Bewiesenen f algebraisch-transzendent in bezu auf $R(g_2, g_3, \ldots, g_k)$, daher auch in bezug auf $R(g_3, \ldots, g_k)$ usw., dahe auch in bezug auf R selbst. Hieraus folgt:

Satz 9. *Genügt eine analytische Funktion $f(x)$ einer Differentia gleichung*

$$\Phi(f^{(i)}) = 0,$$

deren linke Seite ein Polynom in $f, f', f'', \ldots$ ist mit Koeffizienten, d algebraisch-transzendent in bezug auf einen Rationalitätsbereich R, s ist $f(x)$ selbst algebraisch-transzendent in bezug auf R, falls $f(x)$ i Definitionsbereich von R existiert.

Dieser letzte Zusatz ist nötig, da $f(x)$ von $G(R)$ durch eine natü liche Grenze getrennt sein könnte, während der gemeinsame Existen bereich der Koeffizienten von Φ sowohl $G(R)$ als auch den Existen bereich von $f(x)$ enthalten könnte.

Außerdem aber folgt aus der obigen Betrachtung, daß *jede rationa Funktion von algebraisch-transzendenten Funktionen in bezug auf selbst algebraisch-transzendent in bezug auf R ist.*[13]) Und allgemein

[13]) Diesen Satz gibt Stadigh (l. c. S. 5).

; dasselbe auch für jede *algebraische* Funktion von algebraisch-transzen-
ten Funktionen in bezug auf R. —

Wir spezialisieren nun R zum Körper aller Konstanten, betrachten
o von jetzt an nur algebraisch-transzendente Funktionen schlechthin.
seien $g(x)$ und $f(x)$ algebraisch-transzendente Funktionen, und es
e der Wertbereich von $g(x)$ ein gemeinsames Gebiet mit dem Existenz-
eich von $f(x)$. Betrachten wir die Funktion $f(g(x)) = \varphi(x)$. Man
n, falls $g(x)$ keine Konstante ist, die Funktionen $f^{(i)}(g(x))$, die aus
Ableitungen von $f(x)$ durch das Einsetzen von $g(x)$ entstehen,
ional durch die Ableitungen von $\varphi(x)$ und von $g(x)$ ausdrücken, wobei
Nenner eine Potenz von $g'(x)$ auftritt. Nun genügt $f(x)$ nach dem
lfssatz 1 einer algebraischen Differentialgleichung mit konstanten Koeffi-
nten, in der also x nicht explizit vorkommt. Setzen wir in sie für
$x), f'(x), f''(x), \ldots$ die Ausdrücke von $f(g(x)), f'(g(x)), f''(g(x)), \ldots$
den Ableitungen von $\varphi(x)$ und von $g(x)$ ein, so entsteht eine rationale
lation zwischen den Ableitungen von $\varphi(x)$ und $g(x)$, die nicht identisch
steht, da sie für $g(x) = x$, $\varphi(x) = f(x)$ wieder zur Ausgangsdifferential-
ichung für $f(x)$ wird. Aus dem Satz 9 folgt nun, daß $\varphi(x) = f(g(x))$
bst eine algebraische-transzendente Funktion ist.

Diese Tatsache gibt uns die Möglichkeit, analytische Funktionen
hrerer Variablen zu konstruieren, die die Eigenschaft besitzen, daß,
nn man in sie für die Variablen algebraisch-transzendente Funktionen
n x einsetzt, sich wieder eine algebraisch-transzendente Funktion ergibt.
n bilde beliebige algebraische Funktionen von algebraisch-transzendenten
nktionen irgendwelcher Variablen $x, y, z, \ldots$ So erhaltene Funktionen
ze man wieder in beliebige algebraisch-transzendente Funktionen als
riablen ein, von den so entstehenden Funktionen nehme man wieder
iebige algebraische Funktionen usw. Man wiederhole also den Prozeß,
im § 3 zur Bildung von uneigentlichen Funktionen von zwei Variablen
ührt hat, nur mit dem Unterschied, daß jetzt nicht mehr *beliebige*
alytische Funktionen einer Variablen und algebraische Funktionen von
ei Variablen kombiniert werden, sondern *algebraisch-transzendente* Funk-
nen einer Variablen und algebraische Funktionen *beliebig vieler* Variablen.
d ebenso wie dort ist darauf zu achten, daß die Existenz- und die
sprechenden Wertgebiete der vorkommenden Funktionen zueinander
ssen. Jede so entstehende Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ hat nach unseren
zen in der Tat die Eigenschaft, daß $f(\varphi(x), \psi(x), \chi(x), \ldots)$ alge-
isch-transzendent ist, sobald $\varphi(x), \psi(x), \chi(x), \ldots$ es sind. Im nächsten
ragraphen werden wir die allgemeinsten Funktionen aufstellen, die diese
genschaft besitzen. — Wir bemerken noch, daß wenn eine solche Funktion

$f(x, y, z, \ldots)$ nach ganzen positiven Potenzen von $x, y, z, \ldots$ entwickelbar ist, insbesondere die Dirichletsche Reihe

$$f(e^{-\lambda_1 s}, e^{-\lambda_2 s}, \ldots)$$

für positive $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ auch eine algebraisch-transzendente Funktion ist.

Aus jeder Potenzreihe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

die in einer Umgebung des Nullpunktes konvergiert und eine algebraisch-transzendente Funktion darstellt, geht durch die Substitution $x = e^{-s}$ nach dem oben Bewiesenen eine Dirichletsche Reihe hervor, die (einen Bereich absoluter Konvergenz besitzt und dort) eine algebraisch-transzendente Funktion darstellt. Wir können daher die Sätze 7 und 8′ auf gewöhnliche Potenzreihen übertragen. Aus dem Satz 8′ erhalten wir den

Satz 10. *Gibt es ein Teilsystem der Koeffizienten einer in einer Umgebung des Nullpunktes konvergenten Potenzreihe*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

dessen Elemente sich nicht durch endlich viele unter ihnen rational mit rationalen Koeffizienten darstellen lassen, so ist die durch diese Potenzreihe dargestellte Funktion $f(x)$ nicht algebraisch-transzendent.

Hieraus folgt z. B., daß die Reihe

$$\zeta(x, \nu) = \frac{x}{1^\nu} + \frac{x^2}{2^\nu} + \frac{x^3}{3^\nu} + \ldots \tag{36}$$

für jedes rationale nicht ganze ν keiner algebraischen Differentialgleichung als Funktion von x genügt. Denn die algebraischen Zahlen $2^\nu, 3^\nu, \ldots$ können in keinem endlichen Zahlkörper liegen, z. B. weil sonst die Diskriminante dieses Zahlkörpers durch die Diskriminante jedes Unterkörpers teilbar sein müßte, also, wie etwa aus den Sätzen von Landsberg[14]) folgt, durch jede Primzahl. Für ganze ν genügt diese Reihe stets einer algebraischen Differentialgleichung. Für irrationale ν ist es vermutlich nie der Fall, doch ich habe es nicht zu beweisen vermocht. Aus den Sätzen des nächsten Paragraphen folgt aber, daß *die Menge der ν, für welche die Funktion* (36) *algebraisch-transzendent ist, abzählbar ist.* — Es läßt sich andererseits, worauf mich Herr G. Pólya aufmerksam machte, und wie ich mit seiner freundlichen Erlaubnis hier noch anführen möchte, leicht zeigen, daß $\zeta(x, \nu)$ für irrationale ν *nicht algebraisch* ist, wenn man das Verhalten von $\zeta(x, \nu)$ für $x = 1$ betrachtet. Es genügt, wegen der Funktionalgleichung, $0 < \nu < 1$ anzunehmen. Nun ist aber dann (man vgl. etwa E. Picard, Traité d'Analyse, **1.** (2. éd.), p. 230) $\lim_{x=1} (1-x)^{1-\nu} \zeta(x, \nu)$ gleich $\Gamma(1-\nu) \neq 0$

[14]) Crelles Journal für Mathematik, **117** (1897), S. 140 ff.

enn x aus dem Inneren des Einheitskreises radial an den Punkt $x = 1$ rankommt, $\zeta(x, \nu)$ wird also für $x = 1$ von einer irrationalen Ordnung endlich.

Aus dem Satze 7 ergibt sich, daß eine Potenzreihe

$$a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} + \dots,$$

der die wirklich vorkommenden ganzen nicht negativen Exponenten $n_2, \dots$ so stark wachsen, daß $\overline{\lim_{i=\infty}} \frac{n_i}{n_{i-1}} = \infty$ ist, keiner algebraischen fferentialgleichung genügt. Dieser Satz ist bekannt und stammt von rönwall[15]). Aus ihm läßt sich der folgende Satz folgern, der einem kannten Satz von G. Pólya über nicht fortsetzbare Potenzreihen[16]) alog ist:

Satz 11. *Aus jeder unendlichen in einer Umgebung des Nullpunktes nvergenten Potenzreihe kann man auf unendlich viele Weisen durch ultiplikation gewisser Koeffizienten mit* -1 *solche Potenzreihen abiten, die keine algebraisch-transzendente Funktionen darstellen.*

In der Tat, es sei

$$Q(x) = a_{n_1} x^{n_1} + a_{n_2} x^{n_2} + \dots$$

ne aus gewissen Gliedern von

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

rart aufgebaute Potenzreihe, daß sie schon infolge des Anwachsens der xponenten keine algebraisch-transzendente Funktion ist. Genügt $P(x)$ ner algebraischen Differentialgleichung, so kann die aus ihr durch Ändeng des Vorzeichens bei allen auch in $Q(x)$ vorkommenden Gliedern tstehende Potenzreihe $P_1(x)$ keiner algebraischen Differentialgleichung nügen, da sonst dasselbe auch für $Q(x) = \frac{1}{2}(P(x) - P_1(x))$ der Fall n müßte. Ist aber $P(x)$ nicht algebraisch transzendent, und gibt es ter den Potenzreihen

$$\pm a_0 \pm a_1 x \pm a_2 x^2 \pm a_3 x^3 \pm \dots$$

enigstens eine algebraisch-transzendente, so können wir unseren Schluß sie anknüpfen und $Q(x)$ auf unendlich viele verschiedene Weisen hlen. — Aus einer Dirichletschen Reihe

$$\sum a_i e^{-\lambda_i s}$$

---

[15]) Öfversigt af Vetensk. Akademiens Förhandlingar, **55** (Stockholm, 1898). 387 ff.

[16]) Acta Mathematica, **40** (1916), S. 179—183.

entsteht durch die Substitution $e^{-s} = x$ eine nach ins Unendliche wach
senden Potenzen von x fortschreitende Reihe

$$\sum a_i x^{\lambda_i},$$

bei der die Exponenten λ_i nicht mehr ganz, ja nicht einmal rational z
sein brauchen. Da solche Reihenentwicklungen sehr oft bei der Unte
suchung des Verhaltens von Integralen gewöhnlicher Differentialgleichunge
auftreten, so ist es von Interesse, die für solche Reihen aus dem Satz
sich ergebende Folgerung zu formulieren:

Satz 12. *Sind in der in einer gewissen Umgebung des Nullpunkt
konvergenten Reihe*

$$\sum a_i x^{\lambda_i}$$

*die Exponenten λ_i reelle ins Unendliche wachsende Zahlen, und besitze
diese Exponenten keine endliche lineare Basis, so kann die durch die
Reihe dargestellte analytische Funktion keiner algebraischen Differentia
gleichung genügen.*

Der Satz läßt sich unter gewissen Einschränkungen auch auf den Fa
verallgemeinern, daß λ_i komplexe Werte durchlaufen. Für diesen Fa
wird sich jedoch aus den Untersuchungen des letzten Paragraphen ein dire
ter Beweis ergeben.

Dabei verstehen wir (hier und im folgenden) unter x^λ stets $e^{\lambda \log}$
wo der Koeffizient von $\sqrt{-1}$ in $\log x$ nicht negativ und kleiner als 2π
nehmen ist.

§ 6.

Über den Begriff der algebraisch-transzendenten Funktion bei mehreren Variablen.

Im vorhergehenden Paragraphen haben wir eine gewisse Klasse v
analytischen Funktionen mehrerer Variablen $f(x, y, z, \ldots)$ erwähnt, m
der folgenden Eigenschaft: Setzt man in $f(x, y, z, \ldots)$ für $x, y, z,$
irgendwelche algebraisch-transzendente Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \varphi_3(s),$
einer Variablen s ein, so ist die so entstehende Funktion

$$f(\varphi_1(s), \varphi_2(s), \varphi_3(s), \ldots)$$

wieder eine algebraisch-transzendente Funktion, falls die Wert- u
Existenzbereiche der φ zueinander und zum Existenzbereiche von f passe
Wir stellen uns nun die Aufgabe, alle Funktionen mehrerer Variabl
mit dieser Eigenschaft aufzustellen. Wir wollen diese Eigenschaft ku
als *Eigenschaft A* bezeichnen. Es sei etwa $f(x, y, z)$ eine solche Funktio
Dann ist $f(x, y, z)$ für jeden konstanten Wert von y, z algebraisc

anszendent als Funktion von x. Man betrachte nun die Menge aller otenzprodukte aus einer unbestimmten Funktion $\Phi(t)$ und ihren Abtungen beliebiger Ordnung. Diese Menge ist abzählbar, da bei jedem lchen Potenzprodukt

7) $$\Phi(t)^{\alpha}\,\Phi'(t)^{\beta}\ldots\,\Phi^{(i)}(t)^{\gamma}\ldots$$

e Summe $\alpha+1\beta+\ldots+i\gamma+\ldots$ endlich ist und zu jedem Wert dieser mme nur endlich viele Potenzprodukte gehören. Weiter ist aber auch e Menge U aller *endlichen* Untermengen der Menge der Potenzprokte (37) abzählbar, wie bekannt und sofort zu beweisen ist. Für jeden ert von y, z gibt es nun ein System von Potenzprodukten:

8) $$\Pi_1(\Phi^{(i)}),\ \Pi_2(\Phi^{(i)}),\ \ldots,\ \Pi_k(\Phi^{(i)})$$

n der Form (37) und von der Eigenschaft, daß für jene y, z

9) $$c_1\Pi_1(f^{(i)}(x,y,z))+c_2\Pi_2(f^{(i)}(x,y,z))+\ldots+c_k\Pi_k(f^{(i)}(x,y,z))=0$$

, wo die Zeichen der Ableitungen bei $f(x, y, z)$ sich nur auf x beziehen, d $c_1, c_2, \ldots, c_k$ nicht sämtlich verschwindende Konstanten sind. Halten r nun $z=z_0$ fest und lassen y alle Punkte einer beliebig kleinen Strecke $\leqq y \leqq b$ im entsprechenden Regularitätsbereich $(a \leqq y \leqq b,\ c \leqq x \leqq d)$ n f durchlaufen, so nimmt dabei y eine Menge von Werten an von der ächtigkeit des Kontinuums. Und da die Mächtigkeit der Menge U kleiner , so gibt es wenigstens ein System von Potenzprodukten (38), zwischen nen eine Relation von der Form (39) für unendlich viele y besteht. ie Koeffizienten $c_1, \ldots, c_k$ können dabei aber natürlich noch vom jeiligen Werte von y abhängen. Bilden wir nun die Wronskische Derminante der Funktionen

0) $$\Pi_1(f^{(i)}(x,y,z_0)),\ \Pi_2(f^{(i)}(x,y,z_0)),\ \ldots,\ \Pi_k(f^{(i)}(x,y,z_0))$$

bezug auf x, so entsteht eine analytische Funktion $F(x, y)$, die für nendlich viele y aus dem Intervall $a \leqq y \leqq b$ identisch in x verschwindet. e hat daher für jedes feste x, als Funktion von y, unendlich viele Wurzeln n Intervall $a \leqq y \leqq b$, verschwindet daher identisch in y für jeden Wert n x, ist also für jenen festen Wert von z identisch in x, y gleich 0. aher besteht zwischen den Funktionen (40) eine Relation von der Form

$$c_1(y)\Pi_1(f^{(i)}(x,y,z_0))+c_2(y)\Pi_2(f^{(i)}(x,y,z_0))+\ldots+c_k(y)\Pi_k(f^{(i)}(x,y,z_0))=0$$

der, wie aus dem bekannten Beweis des Satzes über die Wronskische eterminante unmittelbar folgt, $c_1(y), c_2(y), \ldots, c_k(y)$ als nicht sämtch identisch verschwindende *analytische* Funktionen von y für $a \leqq y \leqq b$ ngenommen werden können. Man differenziere nun die Relation (41)

$(k-1)$ mal nach x partiell. Wir erhalten dann $k-1$ weitere Gleichungen von der Form

$$2)\quad c_1(y)\Pi_1^{(\nu)}(f^{(i)}(x,y,z_0))+c_2(y)\Pi_2^{(\nu)}(f^{(i)}(x,y,z_0))+\ldots+c_k(y)\Pi_k^{(\nu)}(f^{(i)}(x,y$$

für $\nu=1,2,\ldots,k-1$. Hier bedeutet $\Pi_l^{(\nu)}(\Phi^{(i)})$ den Differentialausdruck der aus $\Pi_l(\Phi^{(i)})$ durch ν-malige Differentiation nach der unabhängigen Variablen entsteht. Betrachten wir die Determinante

$$\begin{vmatrix} \Pi_1(\Phi^{(i)}) & \Pi_2(\Phi^{(i)})\ldots\Pi_k(\Phi^{(i)}) \\ \Pi_1^{(1)}(\Phi^{(i)}) & \Pi_2^{(1)}(\Phi^{(i)})\ldots\Pi_k^{(1)}(\Phi^{(i)}) \\ \vdots & \\ \Pi_1^{(k-1)}(\Phi^{(i)}) & \Pi_2^{(k-1)}(\Phi^{(i)})\ldots\Pi_k^{(k-1)}(\Phi^{(i)}) \end{vmatrix} = T(\Phi^{(i)}).$$

Diese Determinante stellt einen *nicht identisch verschwindenden* Differentialausdruck in Φ dar. Denn verschwände er identisch, und setzen wir für Φ etwa die Riemannsche ζ-Funktion $\zeta(s)$ ein, so entsteht aus ihm die Wronskische Determinante der k Funktionen $\Pi_1(\zeta^{(i)}(s))$, $\Pi_2(\zeta^{(i)}(s)),\ldots,\Pi_k(\zeta^{(i)}(s))$. Aus ihrem Verschwinden folgt die Existenz einer Relation

$$(43)\quad c_1\Pi_1(\zeta^{(i)}(s))+c_2\Pi_2(\zeta^{(i)}(s))+\ldots+c_k\Pi_k(\zeta^{(i)}(s))=0$$

mit nicht sämtlich verschwindenden c. Da nun $\Pi_1,\Pi_2,\ldots,\Pi_k$ lauter voneinander verschiedene Potenzprodukte der Funktion Φ und ihren Ableitungen sind, so ergibt (43) eine algebraische Differentialgleichung, der $\zeta(s)$ genügt. Dies widerspricht aber dem Hilbertschen Satz, daß $\zeta(s)$ keiner algebraischen Differentialgleichung genügt.

Folglich genügt $f(x,y,z)$ für jeden Wert z_0 von z einer algebraischen Differentialgleichung in bezug auf x mit konstanten Koeffizienten:

$$T(f^{(i)}(x,y,z_0))=0.$$

Wir lassen jetzt z variieren und gelangen durch Wiederholung derselben Schlußweise zu einer Relation von der Form

$$(44)\quad c_1(y,z)\overline{\Pi}_1(f^{(i)}(x,y,z))+c_2(y,z)\overline{\Pi}_2(f^{(i)}(x,y,z))+\ldots$$
$$+c_{k'}(y,z)\overline{\Pi}_{k'}(f^{(i)}(x,y,z))=0,$$

in der wieder $\overline{\Pi}_1(\Phi^{(i)}),\ldots,\overline{\Pi}_{k'}(\Phi^{(i)})$ Potenzprodukte aus der Funktion Φ und ihren Ableitungen sind. Differentiieren wir nun (44) $(k'-1)$ mal nach x, so erhalten wir durch dieselbe Überlegung wie oben eine algebraische Differentialgleichung in bezug auf x, der $f(x,y,z)$ identisch

n x, y, z genügt. Der Beweis ist offenbar von der Anzahl der Variablen nabhängig. Wir formulieren das Resultat im

Hilfssatz 5. *Hat eine analytische Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ die Eigenschaft, in der Umgebung eines regulären Punktes für jeden Wert von $y, z, \ldots$ als Funktion von x einer algebraischen Differentialgleichung zu genügen, so genügt sie identisch in $x, y, z, \ldots$ einer gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichung in bezug auf x mit konstanten Koeffizienten.*

Haben wir nur zwei Variable x, y, so liefert unser Beweis mehr. Wir haben in ihm nur benutzt, daß die Mächtigkeit der Menge der ν-Werte, für die $f(x, y)$ algebraisch-transzendent ist, größer ist als die Mächtigkeit einer abzählbaren Menge. Und daraus können wir schließen, daß $f(x, y)$ für *jeden* Wert von y algebraisch-transzendent ist, für den die Funktion $f(x, y)$ analytisch in x bleibt. Hieraus folgt

Satz 13. *Gibt es auch nur einen einzigen Wert von y, für den eine analytische Funktion $f(x, y)$ analytisch in x bleibt und keiner algebraischen Differentialgleichung in bezug auf x genügt, so gibt es höchstens abzählbar viele Werte von y, für die $f(x, y)$ analytisch in x bleibt und algebraisch-transzendent ist.*

Insbesondere sehen wir, daß die Potenzreihe

$$\frac{x}{1^\nu} + \frac{x^2}{2^\nu} + \frac{x^3}{3^\nu} + \cdots$$

nur für eine abzählbare Menge der ν-Werte einer algebraischen Differentialgleichung in bezug auf x genügt, da sie für rationale nicht ganze ν nicht algebraisch-transzendent ist (für jedes ganze ν dagegen algebraisch-transzendent, wie man leicht einsieht).

Weiter folgt aus dem Bewiesenen der schärfere

Satz 14. *Gibt es zu jedem positiven M ein y derart, daß die analytische Funktion $f(x, y)$ für dieses y analytisch bleibt und keiner algebraischen Differentialgleichung genügt, deren Ordnung kleiner als M ist, so gibt es nur abzählbar viele y, für die $f(x, y)$ analytisch in x bleibt und algebraisch-transzendent ist.*

Kehren wir nun zu unserer Aufgabe zurück. Aus unseren Prämissen können wir jetzt folgern, daß $f(x, y, z, \ldots)$ in bezug auf jede ihrer Variablen einer gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten genügt:

$$\Phi_x(f^{(i)}(x, y, z, \ldots)) = 0, \quad \Psi_y(f^{(i)}(x, y, z, \ldots)) = 0,$$
$$X_z(f^{(i)}(x, y, z, \ldots)) = 0, \ldots$$

Hieraus folgt, daß jeder partielle Differentialquotient von f von einer gewissen Ordnung $m+1$ an sich algebraisch durch f und die Ableitungen von f bis zur m-ten Ordnung ausdrücken läßt. Denn es sei $\Phi_x = 0$ von der Ordnung α, $\Psi_y = 0$ von der Ordnung β, $X_z = 0$ von der Ordnung γ usw. Dann kann man für m die Zahl $\alpha+\beta+\gamma+\ldots-1$ nehmen. Denn es genügt dann zu beweisen, daß jede Ableitung

$$\frac{\partial^{a+b+c+\ldots} f}{\partial x^a \partial y^b \partial z^c \ldots}, \tag{46}$$

wo $a+b+c+\ldots \geqq \alpha+\beta+\gamma$ ist, sich algebraisch durch die partiellen Ableitungen von f bis zur Ordnung $a+b+c+\ldots-1$ ausdrücken läßt. Wegen $a+b+c+\ldots \geqq \alpha+\beta+\gamma+\ldots$ folgt entweder $a \geqq \alpha$ oder $b \geqq \beta$ oder $c \geqq \gamma, \ldots$ Es sei etwa $a \geqq \alpha$. Wir bilden dann die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^{a-\alpha+b+c+\ldots} \Phi_x(f^{(i)}(x,y,z,\ldots))}{\partial x^{a-\alpha} \partial y^b \partial z^c \ldots} = 0. \tag{47}$$

In ihr kommt die partielle Ableitung (46) linear vor, multipliziert mit

$$\frac{\partial \Phi_x}{\partial f^{(\alpha)}}, \tag{48}$$

wo $f^{(\alpha)}$ die α-te Ableitung von f nach x ist. Und da wir annehmen können, daß (45) Gleichungen niedrigster Ordnung und unter diesen vom niedrigsten Gesamtgrad sind, ist (48) von 0 verschieden. Andererseits sind alle in (47) vorkommenden Ableitungen, abgesehen von (46), von niedrigerer Ordnung als $a+b+c+\ldots$ Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Ein System von partiellen Differentialgleichungen für eine Funktion $f(x, y, z, \ldots)$, welches gestattet, alle Differentialquotienten von einer gewissen Ordnung an durch die Differentialquotienten niedrigerer Ordnung auszudrücken, nennt man ein *Mayersches System*. Sind die linken Seiten der Differentialgleichungen eines Mayerschen Systems Polynome in den Ableitungen, deren Koeffizienten algebraisch in den unabhängigen Veränderlichen sind, so sprechen wir von einem *algebraischen* Mayerschen System. *Genügt nun eine Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ einem algebraischen Mayerschen System, so genügt sie stets auch in bezug auf jede ihrer Variablen einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.* Denn man kann nach Definition jede der partiellen Ableitungen $\frac{\partial^a f(x, y, z, \ldots)}{\partial x^a}$ algebraisch ausdrücken durch endlich viele partielle Ableitungen von f und durch $x, y, z, \ldots$; daraus folgt aber nach dem Lemma des § 3, daß zwischen einer hinreichend großen Anzahl von partiellen Ableitungen $\frac{\partial^a f(x, y, z, \ldots)}{\partial x^a}$ eine rationale Gleichung mit kon-

anten Koeffizienten besteht. Hieraus und aus dem oben Bewiesenen eht weiter hervor, daß jede Funktion, die einem algebraischen Mayerschen ystem genügt, auch einem solchen Mayerschen System genügt, dessen ifferentialgleichungen auf der linken Seite Polynome in den Ableitungen mit *onstanten* Koeffizienten haben. — Ein Mayersches System läßt sich auch noch nders charakterisieren. Das allgemeine Integral eines solchen Systems hängt icht von willkürlichen Funktionen, sondern nur von endlich vielen willürlichen Konstanten ab. Umgekehrt ist nach einem häufig ausgesprochenen atze ein jedes System von Differentialgleichungen, dessen allgemeines ntegral nur von endlich vielen willkürlichen Konstanten abhängt, ein Iayersches System. Ein strenger Beweis dieses letzten Satzes findet ich indessen in der Literatur nicht vor. Er dürfte wohl erst aus den Untersuchungen von Riquier abzuleiten sein, in denen eine Normalform ür Systeme partieller Differentialgleichungen aufgestellt wurde, an der ie Anzahl und die Art der willkürlichen Elemente im allgemeinen Integral nmittelbar abzulesen ist, und in die jedes System von partiellen Differentialgleichungen durch Differentiationen und Eliminationen übergeführt erden kann[17]).

Unser oben erhaltenes Resultat lautet jetzt, daß jede Funktion mit er Eigenschaft A einem algebraischen Mayerschen System genügt. Dieses Resultat läßt sich nun auch umkehren, so daß sich ergibt:

Satz 15. *Besitzt eine analytische Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ die Eigenchaft, jedesmal eine algebraisch-transzendente Funktion von s zu ergeben, obald man für $x, y, z, \ldots$ algebraisch-transzendente Funktionen von s einetzt, deren Wert- und Existenzbereiche zueinander und zum Existenzereich von $f(x, y, z, \ldots)$ passen, — oder auch nur dann, wenn für alle ariablen $x, y, z, \ldots$, bis auf eine, beliebige Zahlen aus gewissen nicht bzählbaren Mengen eingesetzt werden, und diese eine gleich s gesetzt wird, o genügt sie einem algebraischen Mayerschen System und umgekehrt.*

Der Beweis der Umkehrung bietet keine Schwierigkeiten. Wir verinden ihn mit einigen allgemeineren und weitergehenden Betrachtungen.

Die analytischen Funktionen, die einem algebraischen Mayerschen ystem genügen, bilden nämlich die richtige Verallgemeinerung der algeraisch-transzendenten Funktionen einer Variablen. Für sie gelten ganz naloge Sätze, wie für jene, so daß sie ebenfalls ein in gewissem Sinne bgeschlossenes System bilden. Wir bezeichnen sie als *algebraisch-transndente Funktionen mehrerer Variablen*. Um diesen Begriff noch zu erallgemeinern, definieren wir als einen *Rationalitätsbereich* R einen

[17]) Riquier, Les systèmes d'équations aux dérivées partielles. Paris, Gauthier-illars, 1910.

Körper von analytischen Funktionen gewisser Variablen $x, y, z, \ldots$, die alle einen gemeinsamen Existenzbereich $G(R)$ besitzen, in dem jede von ihnen bis auf $(n-1)$-dimensionale singuläre Mannigfaltigkeiten regulär analytisch ist. Außerdem verlangen wir, daß R mit jeder Funktion von $x, y, z, \ldots$ auch ihre sämtlichen partiellen Ableitungen aller Ordnungen enthält. Wir nennen nun eine analytische Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ *algebraisch-transzendent in bezug auf* R, wenn sie einem Mayerschen System genügt, dessen Differentialgleichungen durch das Nullsetzen von Polynomen in f und ihren Ableitungen mit Koeffizienten aus R entstehen.

Ist R der Körper aller Konstanten, so wird $f(x, y, z, \ldots)$ algebraisch-transzendent schlechthin. Ebenso wie oben können wir zeigen: 1. Jede algebraisch-transzendente Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ in bezug auf R genügt in bezug auf jede ihrer Variablen einer gewöhnlichen Differentialgleichung, deren linke Seite ein Polynom in f und ihren Ableitungen nach jener Variablen mit Koeffizienten aus R ist. 2. Genügt eine analytische Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ in bezug auf jede Variable einer gewöhnlichen Differentialgleichung, deren linke Seite ein Polynom in f und ihren Ableitungen nach jener Variablen mit Koeffizienten aus R ist, so ist f algebraisch-transzendent in bezug auf R. — Und nun gelten die Sätze:

Satz 16. *Ist* $f(x, y, z, \ldots)$ *algebraisch-transzendent in bezug auf den Rationalitätsbereich* $R(g, h, \ldots)$, *der aus einem Rationalitätsbereich* R *durch Adjunktion gewisser in bezug auf* R *algebraisch-transzendenter Funktionen* $g, h, \ldots$ *und ihrer sämtlichen Ableitungen entsteht, so ist* $f(x, y, z, \ldots)$ *auch algebraisch-transzendent in bezug auf* R.

Es genügt, beim Beweise nur den Fall zu betrachten, wo zu R nur *eine* Funktion $g(x, y, z, \ldots)$ mit ihren Ableitungen adjungiert wird. Denn hieraus folgt durch sukzessive Anwendung dieses Falles die Richtigkeit des Satzes für den Fall, daß zu R nur *endlich viele* Funktionen $g, h, \ldots$ mit ihren sämtlichen Ableitungen adjungiert werden. Andererseits lassen sich alle Differentialgleichungen des Mayerschen System, dem f in bezug auf $R(g, h, \ldots)$ genügt, aus endlich vielen Differentialgleichungen ableiten, z. B. aus den gewöhnlichen Differentialgleichungen, denen f in bezug auf jede einzelne Variable genügt. Daher kommt es nur auf endlich viele Größen von $R(g, h, \ldots)$ und ihre Ableitungen an.

Lassen sich nun alle partiellen Ableitungen von f durch μ unter ihnen und die Größen von $R(g)$ algebraisch ausdrücken, lassen sich weiter sämtliche Ableitungen von g durch ν unter ihnen und die Größen von R algebraisch ausdrücken, so muß zwischen $\mu + \nu + 1$ beliebigen partiellen Ableitungen von f eine ganze rationale Relation mit Koeffizienten aus R bestehen, wie aus dem Lemma des § 3 folgt. Es sei nun λ die kleinste

ahl von der Eigenschaft, daß zwischen λ beliebigen partiellen Ableitungen on f eine ganze rationale Relation mit Koeffizienten aus R besteht, und s seien etwa $p_1, p_2, \ldots, p_{\lambda-1}$ solche $\lambda - 1$ partielle Ableitungen von f, wischen welchen eine solche Relation nicht besteht. Dann ist jede par- elle Ableitung von f eine algebraische Funktion von $p_1, \ldots, p_{\lambda-1}$ und on Größen von R, w. z. b. w.[18]).

Satz 17. *Setzt man in eine algebraisch-transzendente Funktion* $(x, y, z, \ldots)$ *für* $x, y, z, \ldots$ *irgendwelche algebraisch-transzendente Funk-ionen* $\varphi(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$, $\psi(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$, $\chi(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$, $\ldots$ *von irgend-elchen Variablen* $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ *ein, so entsteht wieder eine algebraisch-anszendente Funktion von* $\xi, \eta, \zeta, \ldots$

In diesem Satz ist insbesondere die Umkehrung des Satzes 15 als pezieller Fall enthalten. Er ist nur für *algebraisch-transzendente Funk-ionen schlechthin* ausgesprochen. — Will man ihn auf algebraisch-tran-endente Funktionen in bezug auf einen beliebigen Rationalitätsbereich erallgemeinern, so ist es hierzu nötig, den Begriff des Rationalitäts-ereiches R enger zu fassen. Wir müssen nämlich verlangen, daß aus eder Funktion von R durch Einsetzen von beliebigen Funktionen von R ieder eine Funktion von R oder wenigstens eine in bezug auf R algebraisch-anszendente Funktion entsteht.

Zum Beweise des Satzes bezeichnen wir mit μ die kleinste Zahl von er Eigenschaft, daß sich jede Ableitung von $f(x, y, z, \ldots)$ algebraisch mit konstanten Koeffizienten) durch μ unter ihnen ausdrücken läßt. Durch $_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ bezeichnen wir die entsprechenden Zahlen für $\varphi(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$, $(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$, $\chi(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$, $\ldots$ Setzen wir in alle Ableitungen von $(x, y, z, \ldots)$ für $x, y, z, \ldots$ die Funktionen $\varphi, \psi, \chi, \ldots$, so mögen die ntstehenden Funktionen von $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ durch p_i bezeichnet werden. Auch ie p_i haben die Eigenschaft, daß zwischen $\mu + 1$ beliebigen Funktionen p_i ine ganze rationale Relation mit Zahlenkoeffizienten besteht. Es sei nun λ ie kleinste Zahl von der Eigenschaft, daß zwischen $\lambda + 1$ Funktionen p_i ets eine ganze rationale Relation mit Zahlenkoeffizienten besteht. Dann ssen sich alle p_i algebraisch durch gewisse λ unter ihnen ausdrücken. Jede artielle Ableitung von $f(\varphi, \psi, \chi, \ldots)$ ist aber eine ganze rationale Funktion er p_i und der Ableitungen von $\varphi, \psi, \chi, \ldots$, läßt sich also als algebraische unktion von $\lambda + \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \ldots$ Größen darstellen. Daher besteht

[18]) Für analytische Funktionen $F(x, y, z, \ldots)$, für die eine einzige partielle ifferentialgleichung vorgegeben ist, kann man ein Analogon dieses Satzes auf dem-lben Wege ohne Schwierigkeit beweisen: Genügt $F(x, y, z, \ldots)$ einer partiellen ifferentialgleichung, deren linke Seite ein Polynom an den Ableitungen von F ist, it Koeffizienten, die algebraisch-transzendente Funktionen mehrerer Variablen sind, genügt F einer algebraischen partiellen Differentialgleichung.

nach dem Lemma des § 3 zwischen $\lambda + \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \ldots + 1$ Ableitungen von $f(\varphi, \psi, \chi, \ldots)$ eine ganze rationale Relation mit Zahlenkoeffizienten. Daher lassen sich alle diese Ableitungen durch endlich viele (höchstens $\lambda + \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \ldots$) unter ihnen algebraisch ausdrücken, w. z. b. w

§ 7.

Über algebraisch-transzendente Dirichletsche Reihen und Potenzreihen, die nach beliebigen Potenzen der unabhängigen Veränderlichen fortschreiten.

Ist die durch eine Dirichletsche Reihe dargestellte Funktion

$$f(s) = \sum_{i=0}^{i=\infty} a_i e^{-\lambda_i s} \tag{49}$$

algebraisch-transzendent, so kann die Reihe (49) nach den Sätzen 1 und 6 in der Form geschrieben werden

$$F\left(e^{-\lambda^{(1)} s}, e^{-\lambda^{(2)} s}, \ldots, e^{-\lambda^{(\mu)} s}\right), \tag{50}$$

wo $F(x, y, z, \ldots)$ eine zunächst formal hingeschriebene Potenzreihe ist, die nach ganzen positiven und negativen Potenzen von $x, y, z, \ldots$ fortschreitet. Die reellen Zahlen $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(\mu)}$ können dabei positiv und linear unabhängig angenommen werden. Ist nun F eine nach *positiven* Potenzen von $x, y, z, \ldots$ fortschreitende Reihe, oder hat sie nur endlich viele negative Glieder, so ist sie in einem gewissen Bereich absolut konvergent, sobald (49) einen Konvergenzbereich besitzt; wir sehen, daß in diesem Falle (50) (und (49)) auch stets einen Bereich absoluter Konvergenz besitzt. Dies ist insbesondere stets der Fall, wenn (49) eine Reihe vom „zahlentheoretischen Typus" ist:

$$\sum \frac{a_n}{n^s}.$$

Es genüge nun (49) einer algebraischen Differentialgleichung mit Zahlenkoeffizienten

$$\Phi(f^{(i)}(s)) = 0. \tag{51}$$

Wir setzen nun in die Entwicklung (49) für die Zahlen a_i Unbestimmte u_i und tragen die so entstehende Reihe $\varphi(s)$, die natürlich nur eine formale Bedeutung hat, in Φ ein. Es entsteht nach rein formaler Umordnung eine Entwicklung von der Form

$$\sum A_{n_1, n_2, \ldots, n_\mu} e^{-(n_1 \lambda^{(1)} + n_2 \lambda^{(2)} + \ldots + n_\mu \lambda^{(\mu)}) s},$$

wo die Exponentiellen nach wachsenden Exponenten geordnet sind, die ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_\mu$ aber gewisse ganze positive und negative Werte durchlaufen. $A_{n_1, n_2, \ldots, n_\mu}$ ist ein Polynom in den u_i, den λ_i und

en Koeffizienten von Φ. In $A_{n_1, n_2, \ldots, n_\mu}$ können aber nicht alle Potenzodukte der u_i vorkommen, sondern nur diejenigen, die eine gewisse ewichtsbedingung erfüllen. Um diese abzuleiten, stellen wir den allemeinen Exponenten λ_i von (49) linear mit ganzen Koeffizienten durch $^{1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(\mu)}$ dar:

$$\lambda_i = \alpha_i^{(1)} \lambda^{(1)} + \alpha_i^{(2)} \lambda^{(2)} + \ldots + \alpha_i^{(\mu)} \lambda^{(\mu)}.$$

a bei der Differentiation eines Gliedes von (49) der Exponent unverndert bleibt, so muß bei jedem Potenzprodukt der u_i in $A_{n_1, n_2, \ldots, n_\mu}$:

$$u_{j_1} u_{j_2} u_{j_3} \ldots,$$

o $j_1, j_2, j_3, \ldots$ gleiche oder verschiedene Indizes sind, wegen der linearen nabhängigkeit der $\lambda^{(\varkappa)}$ das System der Bedingungen erfüllt sein:

$$\alpha_{j_1}^{(\nu)} + \alpha_{j_2}^{(\nu)} + \alpha_{j_3}^{(\nu)} + \ldots = n_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \mu).$$

ind nun $c_1, c_2, \ldots, c_\mu$ beliebige Zahlen, so multipliziere man jedes u_i mit

$$c_1^{\alpha_i^{(1)}} c_2^{\alpha_i^{(2)}} \ldots c_\mu^{\alpha_i^{(\mu)}}$$

ann multipliziert sich jedes $A_{n_1, n_2, \ldots, n_\mu}$ mit $c_1^{n_1} c_2^{n_2} \ldots c_\mu^{n_\mu}$. Verschwinen nun alle A, falls man die Unbestimmten u_i durch die Zahlen a_i ertzt, so verschwinden sie auch, falls man alle u_i durch $a_i c_1^{\alpha_i^{(1)}} c_2^{\alpha_i^{(2)}} \ldots c_\mu^{\alpha_i^{(\mu)}}$ rsetzt. Auch jede so entstehende Dirichletsche Reihe genügt also formal er Differentialgleichung (51). Die so entstehenden Reihen sind aber

$$F(c_1 e^{-\lambda^{(1)} s}, c_2 e^{-\lambda^{(2)} s}, \ldots, c_\mu e^{-\lambda^{(\mu)} s}),$$

nd konvergieren für hinreichend kleine $c_1, c_2, \ldots, c_\mu$, falls F nach posiven Potenzen von $x, y, z, \ldots$ fortschreitet und konvergent ist. Wir rmulieren dies im

Satz 18. *Ist $F(x, y, z, \ldots)$ eine nach ganzen positiven Potenzen n $x, y, z, \ldots$ (mit höchstens endlich vielen negativen Potenzen) fortchreitende, in einer Umgebung des Nullpunktes konvergente Potenzreihe und enügt für irgendein System positiver linear unabhängiger $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}, \ldots$ e Dirichletsche Reihe*

$$^{2)} \qquad F(e^{-\lambda^{(1)} s}, e^{-\lambda^{(2)} s}, e^{-\lambda^{(3)} s}, \ldots)$$

ner algebraischen Differentialgleichung mit Zahlenkoeffizienten, so genügt ir jeden Wert der Konstanten $c_1, c_2, c_3, \ldots$ die Funktion

$$^{3)} \qquad F(c_1 e^{-\lambda^{(1)} s}, c_2 e^{-\lambda^{(2)} s}, c_3 e^{-\lambda^{(3)} s}, \ldots),$$

fern sie für diese Werte der Konstanten existiert, derselben Differentialeichung. Ist $F(x, y, z, \ldots)$ eine formale Laurentsche Entwicklung,

und genügt (52) *formal einer algebraischen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, so genügt auch jede Reihe* (53) *formal derselben Differentialgleichung.*

Aus diesem Satz können wir nun sofort den weiteren Satz folgern:

Satz 19. *Ist* $F(x, y, z, \ldots)$ *eine nach ganzen positiven Potenzen von* $x, y, z, \ldots$ *(höchstens mit endlich vielen negativen Potenzen) fortschreitende, in einer Umgebung des Nullpunktes konvergente Potenzreihe und genügt für irgendein System positiver linear unabhängiger* $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots$ *die Dirichletsche Reihe*

$$f(s) = F(e^{-\lambda^{(1)}s}, e^{-\lambda^{(2)}s}, \ldots) \tag{54}$$

einer algebraischen Differentialgleichung

$$\Phi(f^{(i)}(s)) = 0, \tag{55}$$

so genügt $F(x, y, z, \ldots)$ *einer algebraischen partiellen Differentialgleichung. Ist* $F(x, y, z, \ldots)$ *eine beliebige Laurentsche Entwicklung und genügt* (54) *formal einer algebraischen Differentialgleichung, so genügt* $F(x, y, z, \ldots)$ *formal einer algebraischen partiellen Differentialgleichung.*

Wir können $\Phi(f^{(i)})$ als ein Polynom in den $f^{(i)}(s)$ mit konstanten Koeffizienten annehmen. Dann genügt auch $F(c_1 e^{-\lambda^{(1)}s}, c_2 e^{-\lambda^{(2)}s}, \ldots)$ der Differentialgleichung (55). Nun setzt sich jede Ableitung von $F(c_1 e^{-\lambda^{(1)}s}, c_2 e^{-\lambda^{(2)}s}, \ldots)$ nach s aus partiellen Ableitungen von $F(x, y, z, \ldots)$ nach seinen Argumenten, für die nachträglich die Werte $c_1 e^{-\lambda^{(1)}s}, c_2 e^{-\lambda^{(2)}s}, \ldots$ eingesetzt werden, zusammen, außerdem aus den Exponentiellen $c_1 e^{-\lambda^{(1)}s}, \ldots$ und den Zahlen $\lambda^{(i)}$. Ist (55) etwa von der Ordnung m, so beachten wir, daß die m-te Ableitung von $F(c_1 e^{-\lambda^{(1)}s}, \ldots)$ gleich ist:

$$\sum \left[\frac{\partial^m F(x, y, z, \ldots)}{\partial x^a \partial y^b \ldots}\right]_{\substack{x = c_1 e^{-\lambda^{(1)}s} \\ y = c_2 e^{-\lambda^{(2)}s}}} c_1^a (-\lambda^{(1)})^a e^{-a\lambda^{(1)}s} c_2^b (-\lambda^{(2)})^b e^{-b\lambda^{(2)}s} \ldots + \ldots$$

Bei den Ableitungen niedrigerer Ordnung von $F(c_1 e^{-\lambda^{(1)}s}, \ldots)$ nach s treten die m-ten partiellen Ableitungen von $F(x, y, z, \ldots)$ noch nicht auf. Setzen wir nun $s = 0$, so entsteht aus (55) eine algebraische partielle Differentialgleichung m-ter Ordnung für $F(c_1, c_2, c_3, \ldots)$ als Funktion der Konstanten $c_1, c_2, \ldots$, die nun wieder durch die Variablen $x, y, z, \ldots$ ersetzt werden können. W. z. b. w.

Wir kehren nun wieder zu den Potenzreihen zurück, die nach beliebigen wachsenden Potenzen von x fortschreiten und algebraisch-transzendente Funktionen darstellen. Ein auf solche Reihen bezügliches Resultat, welches der ersten Hälfte des Satzes 19 entspricht, ließe sich aus diesem Satze durch direkte Übertragung ableiten. Wir schlagen jedoch einen direkten

eg ein, bei dem sich die den Sätzen 18 und 19 entsprechenden Sätze größerer Allgemeinheit ergeben. Es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$ beliebige *linear abhängige* Zahlen, die auch komplex sein können. $F(x, y, \ldots)$ sei eine liebige Laurentsche Entwicklung in μ Variablen $x, y, \ldots$, und es ge- ge $F(x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \ldots)$ einer algebraischen Differentialgleichung in x. Wir hmen dabei an, daß $F(x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \ldots)$, nach Potenzen von x entwickelt, eine lge von Exponenten mit einer einzigen Häufungsstelle im Unendlichen hat. sei etwa

$$F(x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \ldots) = f(x) = \sum a_i x^{n_i} \qquad \lim_{i=\infty} n_i = \infty .$$

seien nun zunächst λ_i reell und es besitze $f(x)$ (daher auch jede Ab- tung von $f(x)$) einen Bereich absoluter Konvergenz. Ein m-maliger mlauf um den Nullpunkt führt $F(x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \ldots)$ in ein anderes Integral $(e^{2m\pi\lambda_1 i} x^{\lambda_1}, e^{2m\pi\lambda_2 i} x^{\lambda_2}, \ldots)$ derselben Differentialgleichung $\Phi(f^{(i)}(x)) = 0$ ber. Die Koeffizienten von Φ mögen dabei rational in x sein. Ist keine neare ganzzahlige Kombination der λ_i rational, so können wir die xponentiellen $e^{2m\pi\lambda_1 i}, e^{2m\pi\lambda_2 i}, \ldots$ nach einem bekannten Satz über ophantische Approximationen beliebig vorgegebenen Zahlen $c_1, c_2, \ldots$ m absoluten Betrage 1 beliebig nahe bringen. Lassen wir daher m geeigneter Weise unendlich werden, so ergibt sich, daß auch $(c_1 x^{\lambda_1}, c_2 x^{\lambda_2}, \ldots)$ der Differentialgleichung $\Phi(f^{(i)}(x)) = 0$ genügt. Und eraus folgt durch dieselbe Schlußweise wie oben, daß $F(x, y, \ldots)$ einer gebraischen partiellen Differentialgleichung genügt. Besteht zwischen n λ_i eine Relation von der Form $p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + \ldots + p_\mu\lambda_\mu = p$, wo $, \ldots . p_\mu, p$ ganze Zahlen sind und $p \neq 0$ ist, so können wir nz analog wie oben in das Integral $F(x^{\lambda_1}, \ldots, x^{\lambda_\mu})$ willkürliche onstanten $c_1, c_2, \ldots, c_{\mu-1}$ vom absoluten Betrage 1 einführen: $(c_1^{p_\mu} x^{\lambda_1}, c_2^{p_\mu} x^{\lambda_2}, \ldots, c_1^{-p_1} c_2^{-p_2} \ldots c_{\mu-1}^{-p_{\mu-1}} x^{\lambda_\mu})$. Hieraus folgt weiter durch bstitution $x = cx'$, daß auch $F(\gamma_1 x^{\lambda_1}, \ldots, \gamma_\mu x^{\lambda_\mu})$ einer algebraischen fferentialgleichung in x genügt, wenn $\gamma_1, \ldots, \gamma_\mu$ beliebige Konstanten m absoluten Betrage 1 sind, — wenn auch nicht notwendig derselben eichung $\Phi(f^{(i)}) = 0$. Hieraus schließen wir wieder, daß $F(x, y, z, \ldots)$ ner algebraischen partiellen Differentialgleichung genügt. In beiden Fällen aucht $F(x, y, z, \ldots)$ keinen Konvergenzbereich im gewöhnlichen Sinne besitzen, und dann genügt $F(x, y, z, \ldots)$ *formal* einer algebraischen rtiellen Differentialgleichung.

Wir lassen jetzt die Annahme der absoluten Konvergenz von $f(s)$ len, und nehmen an, daß $f(s)$ einer algebraischen Differentialgleichung *rmal* genügt. Wir nehmen aber außerdem an, daß alle Exponenten n_i s auf endlich viele in einem und demselben Winkel von der Öffnung $< \pi$ liegen. Wir betrachten zugleich mit $f(s)$ die Reihe

$$\varphi(x) = \sum u_i x^{n_i},$$

wo u_i Unbestimmte sind. Setzt man $\varphi(x)$ in $\Phi(\varphi^{(i)})$ ein, so entsteht

$$\sum A_k(u_i) x^{m_k},$$

wo auch $\lim_{i=\infty} m_i = \infty$ ist und $A_k(u_i)$ nur von endlich vielen u_i abhängt nach unserer Annahme über die n_i. Dabei ist $A_k(a_i) = 0$ für jedes k. Wieder unterscheiden wir zwei Fälle: 1. Es sei keine lineare ganzzahlig Kombination der λ_i rational, oder es gebe eine rationale lineare Verbindung der λ_i, die rational ist, Φ hänge aber dann von x nicht explizit ab. Ersetzt man dann $F(x^{\lambda_1}, \ldots, x^{\lambda_\mu})$ durch $F(c_1 x^{\lambda_1}, \ldots, c_\mu x^{\lambda_\mu})$, wo $c_1, \ldots, c_\mu$ willkürliche Konstanten sind, so multipliziert sich jedes a_i mit einem Potenzprodukt der c_i; ebenso multiplizieren sich aber auch alle $A_k(a_i)$ einfach mit einem Potenzprodukt der c_i, bleiben also sämtlich gleich 0. Wir sehen, daß auch $F(c_1 x^{\lambda_1}, \ldots, c_\mu x^{\lambda_\mu})$ der Differentialgleichung $\Phi(f^{(i)}$ genügt. Und daraus können wir wiederum schließen, daß $F(x, y, z, \ldots$ einer algebraischen partiellen Differentialgleichung genügt. Besteht aber 2. eine lineare Relation $p_1\lambda_1 + \ldots + p_\mu\lambda_\mu = p$, wo $p_1, \ldots, p_\mu, p$ ganz sind und p von 0 verschieden ist, und enthält Φ die unabhängige Variable x explizit, so bilden wir wieder, unter $c_1, c_2, \ldots, c_{\mu-1}$ willkürliche von 0 verschiedene Konstanten verstanden, die Reihe

$$F(c_1^{p_\mu} x^{\lambda_1}, c_2^{p_\mu} x^{\lambda_2}, \ldots, c_1^{-p_1} c_2^{-p_2} \ldots c_{\mu-1}^{-p_{\mu-1}} x^{\lambda_\mu}). \tag{56}$$

Tragen wir sie in Φ ein, so multiplizieren sich wieder die Ausdrücke $A_k(a_i)$ nur mit einem Potenzprodukt der c_i, bleiben also gleich 0. Daher genügt auch (56) formal der Differentialgleichung $\Phi(f^{(i)}) = 0$, und von hier aus schließen wir wieder ganz analog wie oben, für den Fall der absoluten Konvergenz von $f(s)$, daß $F(x, y, z, \ldots)$ formal einer algebraischen partiellen Differentialgleichung genügt. Besitzt dann $F(x, y, z, \ldots)$ einen Konvergenzbereich im gewöhnlichen Sinne, so genügt auch die durch sie dargestellte *Funktion* jener Differentialgleichung.

Die zuletzt angegebenen Resultate über Potenzreihen, die nach beliebigen Potenzen der unabhängigen Variablen fortschreiten, sind insofern von Interesse, als solche Reihenentwicklungen sehr oft beim Studium des Verhaltens der Integrale von gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Nähe eines singulären Punktes auftreten. Hier wurde besonders von Poincaré, Picard und anderen[19]) eine Methode ausgebildet, die Untersuchung der Reihenentwicklungen solcher Integrale auf die Aufstellung gewisser Funktionen mehrerer Variablen $F(x, y, z, \ldots)$ zu reduzieren

[19]) Vgl. E. Picard, Traité d'Analyse **3**, (2. éd.), S. 1—40.

e gewissen, aus der vorgegebenen gewöhnlichen leicht ableitbaren par-
ellen Differentialgleichungen genügen, und aus denen solche Reihenent-
icklungen nach der Formel

$$f(x) = F(c_1 x^{\lambda_1}, c_2 x^{\lambda_2}, \ldots)$$

halten werden. Allerdings sind diese Entwicklungen bei Poincaré und
icard an sehr viele verschiedene Annahmen geknüpft, und das Auf-
eten von partiellen Differentialgleichungen erscheint wie ein sehr merk-
ürdiger Kunstgriff. Die obigen Resultate geben für algebraische Differential-
eichungen gewissermaßen eine *Umkehrung* dieser Methoden. — Im
ächsten Paragraphen werden wir auf den Fall der analytischen Differen-
algleichungen eingehen, und insbesondere den Satz 12 auf den Fall
omplexer Exponenten verallgemeinern. —

Wir knüpfen jetzt wieder an den Beweis des Satzes 19 an, machen
ier jetzt die Voraussetzung, daß die dortige Funktion (54)

4) $$F(e^{-\lambda^{(1)}s}, e^{-\lambda^{(2)}s}, \ldots)$$

r *beliebige hinreichend große positive* $\lambda^{(i)}$ *der von den* $\lambda^{(i)}$ *unabhängigen*
ifferentialgleichung (55) *genügt.* Ähnlich wie dort können wir wieder in
as Integral (54) willkürliche Konstanten einführen, die aber jetzt mit
$y, z, \ldots$, bezeichnet werden mögen. Wir erhalten dann die Funktion

$$f(s) = F(x e^{-\lambda^{(1)}s}, y e^{-\lambda^{(2)}s}, \ldots)$$

e einer von den $x, y, z, \ldots, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots$ unabhängigen algebraischen
ifferentialgleichung $\Phi(f^{(i)}) = 0$ in s genügt. Wir setzen nun die Differential-
eichung in eine partielle Differentialgleichung in bezug auf $x, y, z, \ldots$
n, wobei s vorerst unbestimmt bleiben mag. Wir erhalten so eine
artielle Differentialgleichung, in der die höchsten — m-ten — partiellen
bleitungen von F in der Verbindung vorkommen:

$$\sum \left[\frac{\partial^m F(x', y', \ldots)}{\partial x'^a \partial y'^b}\right]_{\substack{x' = x e^{-\lambda^{(1)}s} \\ y' = y e^{-\lambda^{(2)}s} \\ \vdots}} x^a y^b \ldots (-\lambda^{(1)})^a (-\lambda^{(2)})^b \ldots e^{-a\lambda^{(1)}s - b\lambda^{(2)}s - \ldots}$$

rücken wir $x, y, \ldots$, durch $x' = x e^{-\lambda^{(1)}s}, y' = y e^{-\lambda^{(2)}s}, \ldots$ aus, so er-
lten wir eine partielle Differentialgleichung für $F(x', y', z', \ldots)$, in
r die höchsten Ableitungen von F in der Verbindung vorkommen:

$$\sum \left(\frac{\partial^m F(x', y', \ldots)}{\partial x'^a \partial y'^b \ldots}\right) x'^a y'^b \ldots (-\lambda^{(1)})^a (-\lambda^{(2)})^b \ldots .$$

a diese Differentialgleichung für beliebige Werte der $\lambda^{(i)}$ gilt, so gestattet
e, die m-ten partiellen Ableitungen von $F(x', y', \ldots)$ durch die Ab-
itungen niedrigerer Ordnung und $x', y', \ldots$ algebraisch auszudrücken —

$F(x', y', \ldots)$ genügt also einem algebraischen Mayerschen System. Diese Resultat ist deshalb von Bedeutung, weil wir jetzt beweisen werden *Hat eine analytische Funktion $F(x, y, \ldots)$ die Eigenschaft, daß für be liebige reelle Wertsysteme von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, die linear unabhängig sind und in beliebig vorgegebenen Intervallen liegen, die Funktion $F(e^{-\lambda_1 s}, e^{-\lambda_2 s}, \ldots$ von s algebraisch-transzendent ist, so genügt $F(e^{-\lambda_1 s}, e^{-\lambda_2 s}, \ldots)$ für all λ_i einer festen algebraischen Differentialgleichung.* Dies folgt nicht direk aus dem Hilfssatz 5, da wir $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ linear unabhängig annehmen wollen läßt sich aber durch dasselbe Verfahren beweisen, wie der Hilfssatz 5 Wi wollen etwa den Fall von drei Variablen ins Auge fassen und λ_1 gleich — annehmen, was nach den Sätzen von § 5 erlaubt ist. Geben wir λ_3 irgend einen festen irrationalen Wert λ_0, so genügt $F(e^s, e^{-\lambda_2 s}, e^{-\lambda_0 s})$ einer alge braischen Differentialgleichung für jeden von 1 und λ_0 linear unabhängigen irrationalen Wert von λ_2 aus dem vorgeschriebenen Intervall. Daher gib es solche Potenzprodukte aus den Ableitungen von $F(e^s, e^{-\lambda_2 s}, e^{-\lambda_0 s})$, di für unendlich viele λ_2 aus einem bestimmten Intervall linear abhängig Funktionen von s werden:

$$\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k.$$

Daher verschwindet ihre Wronskische Determinante identisch in s, λ_2 und es besteht eine Relation

$$c_1(\lambda_2)\Pi_1 + c_2(\lambda_2)\Pi_2 + \ldots + c_k(\lambda_2)\Pi_k = 0,$$

aus der wir durch Differentiation und die wie im § 6 zu begründende Eli mination der $c_i(\lambda_2)$ endlich eine Differentialgleichung für $F(e^s, e^{-\lambda_2 s}, e^{-\lambda_0 s}$ erhalten, der $F(e^s, e^{-\lambda_2 s}, e^{-\lambda_0 s})$ für jeden Wert von λ_2 genügt. Da e nun für jeden irrationalen Wert λ_0 von λ_3 aus einem bestimmten Interval eine solche Differentialgleichung gibt, so führt uns ebenso wie im § 6 ein Wiederholung desselben Verfahrens zu einer algebraischen Differentialglei chung, der $F(e^s, e^{-\lambda_2 s}, e^{-\lambda_3 s})$ für jeden Wert von λ_2, λ_3 genügt. Un hieraus folgt nach den Sätzen des § 5, daß auch $F(e^{-\lambda_1 s}, e^{-\lambda_2 s}, e^{-\lambda_3 s})$ eine festen algebraischen Differentialgleichung für jedes Wertsystem von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$ genügt. — Wir bemerken noch, daß wir durch sukzessive Differentiatione und Eliminationen, die mit Hilfe des Lemmas aus dem § 3 ohne weitere zu begründen sind, erreichen können, daß die Koeffizienten der algebrai schen Differentialgleichung, der $F(e^{-\lambda_1 s}, e^{-\lambda_2 s}, e^{-\lambda_3 s})$ genügt, von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$ unabhängig und gewöhnliche rationale Zahlen werden. — Wir können jetzt de Satz formulieren, der sich dem Satz 15 und dem Hilfssatz 5 an dieSeite stellt

Satz 20: *Hat eine analytische Funktion $F(x, y, z, \ldots)$ die Eigen schaft, daß $F(e^{-\lambda_1 s}, e^{-\lambda_2 s}, e^{-\lambda_3 s}, \ldots)$ für beliebige reelle, oder auch nu für beliebige reelle linear unabhängige in den festen vorgeschriebene*

ntervallen liegende $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ algebraisch-transzendent in s wird, so t $F(x, y, z, \ldots)$ selbst eine algebraisch-transzendente Funktion von , $y, z, \ldots$, genügt also einem Mayerschen System algebraischer par-eller Differentialgleichungen.

§ 8.

Potenzreihen, die keiner analytischen Differentialgleichung genügen.

Das Hauptziel der Entwickelungen dieses Paragraphen ist der Beweis on später bezüglich der Konvergenzfragen durch den Satz 22 zu er-inzenden

Satz 21. *Es sei $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ eine Potenzreihe, die nach ositiven Potenzen von $x, y - c, y' - c_1, \ldots, y^{(n)} - c_n$ fortschreitet und einer gewissen Umgebung des Punktes $x = 0, y = c, y' = c_1, \ldots, y^{(n)} = c_n$ nvergiert. In den Differenzen $y^{(i)} - c_i$ sind c_i Konstanten. Einige m ihnen können unendlich werden. Dann ist unter $y^{(i)} - c_i$ wie üblich $\frac{}{c_i}$ zu verstehen. Es genüge die Reihe*

$$y = \sum_{i=0}^{i=\infty} a_i x^{n_i} \tag{7}$$

rmal der Differentialgleichung

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{8}$$

abei sind die n_i reelle oder komplexe Konstanten, über die folgende An-hmen zu machen sind: Ihre reellen Teile sind mit i von einem i an nehmend geordnet und konvergieren gegen $+\infty$. Sind nicht alle n_i ell, so sei etwa n_k ein nicht reeller Exponent, dessen reeller Teil r öglichst klein ist. Sind dann die reellen Exponenten n_i, die kleiner s r sind, ganze nicht negative Zahlen, oder gibt es keine reellen Ex-nenten $< r$, so müssen wir voraussetzen, daß r keinen nicht negativen nzzahligen Wert hat, und daß es nur einen Exponenten n_i gibt, dessen eller Teil gleich r ist.

Die Zahlen $c, c_1, \ldots$ seien die „Werte" von y und der Ableitungen n y für $x = 0$.

Ist eine der Zahlen c_i (und dann auch alle folgenden) ∞, so muß e formal gebildete i-te Ableitung von y mit einer Potenz von x an-ngen, deren Exponent einen negativen reellen Teil hat. Dann läßt sich nach unseren Annahmen über die n_i in eine nach Potenzen von x rtschreitende Reihe formal entwickeln, deren sämtliche Exponenten posi-en reellen Teil haben. Diese Entwicklungen sind dann in F für einzusetzen.

Unter diesen Annahmen lassen sich alle n_i linear mit ganzen ratio-
nalen Koeffizienten durch endlich viele unter ihnen ausdrücken.

Wir bezeichnen die Größen x, $y - c$, ..., $y^{(i)} - c_i$, ... $\left(\text{bzw. } \frac{1}{y^{(i)}}\right)$ durch
$z_1, z_2, \ldots, z_{i+2}, \ldots$ und können dann (58) in der Form schreiben:

$$\Phi(z_1, z_2, \ldots) = 0, \tag{59}$$

wo Φ eine gewöhnliche Potenzreihe in $z_1, z_2, \ldots$ ist, die im Nullpunkt
verschwindet und in einer Umgebung des Nullpunktes konvergiert. Wir
bezeichnen die ersten partiellen Ableitungen von Φ nach $z_1, z_2, \ldots$ durch
$\Phi_1(z_i), \Phi_2(z_i), \ldots$ und behaupten, *daß die Gleichung* (59) *sich nötigen-*
falls durch eine solche ersetzen läßt, daß keine der Gleichungen

$$\Phi_1(z_i) = 0, \quad \Phi_2(z_i) = 0, \ldots \tag{60}$$

formal besteht. Im Nachweis der Richtigkeit dieser Behauptung liegt die
eigentliche Schwierigkeit der folgenden Entwicklungen.

Wir müssen zunächst an einige Tatsachen aus der Theorie der Teil-
barkeit von Potenzreihen in mehreren Variablen in der Umgebung eines
Punktes erinnern[20]). — Von allen Potenzreihen, die wir dabei betrachten,
setzen wir voraus, daß sie in einer Umgebung des Nullpunktes kon-
vergieren. — Eine Potenzreihe $\psi_1(z_i)$ heißt durch eine andere $\psi_2(z_i)$
teilbar, wenn eine Gleichung besteht:

$$\psi_1(z_i) = \psi_2(z_i)\, m(z_i),$$

wo $m(z_i)$ eine Potenzreihe ist. Ist jede der Potenzreihen $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$
durch die andere teilbar, so heißen sie *äquivalent.* Dann verschwindet
$m(z_i)$ im Nullpunkt nicht. Eine Potenzreihe $\psi(z_i)$ heißt *irreduzibel*, wenn
sie nur durch solche Potenzreihen teilbar ist, die ihr äquivalent sind, wenn
sie sich also nicht in der Form schreiben läßt:

$$\psi(z_i) = \psi_1(z_i)\psi_2(z_i),$$

wo beide Potenzreihen $\psi_1(z_i)$ und $\psi_2(z_i)$ im Nullpunkt verschwinden. Sieht
man äquivalente irreduzible Potenzreihen nicht als verschieden an, so läßt
sich jede im Nullpunkt verschwindende Potenzreihe nur auf eine einzige
Weise als ein Potenzprodukt von irreduziblen Potenzreihen darstellen. Der
Beweis dieses letzten Satzes beruht auf dem *Vorbereitungssatz* von
Weierstraß. Der Vorbereitungssatz besagt: Kommt in einer im Null-
punkt verschwindenden Potenzreihe $\psi(z_1, z_2, z_3, \ldots)$ eine Potenz von z_1
allein vor, ist also $\psi(z_1, 0, 0, \ldots)$ nicht identisch in z_1 gleich 0, so ist

---

[20]) Man vergleiche etwa Weierstraß, Einige auf die Theorie der analytischen
Funktionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze, Gesammelte Werke, 2,
S. 135—188.

$\psi(z_1, z_2, \ldots)$ einer Potenzreihe äquivalent, die in bezug auf z_1 ein *Polynom* ist, d. h. es gilt:

$$\psi(z_1, z_2, z_3, \ldots) = (z_1^m + A_1(z_2, z_3, \ldots) z_1^{m-1} + \ldots + A_m(z_2, z_3, \ldots)) E(z_1, z_2, \ldots),$$

wo $E(z_1, z_2, z_3, \ldots)$ im Nullpunkt nicht verschwindet und $A_1(z_2, z_3, \ldots), \ldots, A_m(z_2, z_3, \ldots)$ Potenzreihen in $z_2, z_3, \ldots$ sind. — Kommt aber in $\psi(z_1, z_2, \ldots)$ keine Potenz von z_1 allein, oder von z_2 allein usw. vor, so kann man durch eine lineare Transformation der Variablen z_i erreichen, daß in ψ von jeder der neuen Variablen eine von den anderen Variablen freie Potenz vorkommt. Und dann ist der Vorbereitungssatz anwendbar.

Wäre nun der Vorbereitungssatz stets ohne vorherige lineare Transformation anwendbar, so würde der Beweis unserer obigen Behauptung keine Schwierigkeiten bieten. Denn dann könnten wir mit Hilfe des Vorbereitungssatzes aus der Gleichung $\Phi(z_i) = 0$ und der etwa noch außerdem bestehenden $\Phi_i(z_i) = 0$ die Variable z_{n+2} eliminieren und dadurch eine analytische Differentialgleichung erhalten, der y formal genügt und die von *niedrigerer* Ordnung wäre. Und eine endlichmalige Anwendung dieses Verfahrens würde uns zum Ziele führen. Da aber der Vorbereitungssatz nicht immer anwendbar ist, so scheint es, daß unsere heutigen Kenntnisse über analytische Funktionen mehrerer Variablen eine direkte Elimination einer *bestimmten* Variablen aus zwei analytischen Gleichungen nicht immer ermöglichen[21]). In unserem Falle gelingt es jedoch, auf einem Umwege zum Ziele zu kommen. —

Es kann vorkommen, daß eine Potenzreihe in μ Variablen z_i nach einer linearen homogenen umkehrbaren Transformation der z_i einer solchen Potenzreihe äquivalent ist, die von weniger als μ Variablen abhängt. Die kleinste Zahl ϱ von der Eigenschaft, daß $\psi(z_i)$ nach einer linearen homogenen umkehrbaren Transformation der z_i einer Potenzreihe in ϱ Variablen äquivalent ist, wollen wir als den *Rang* von $\psi(z_i)$ bezeichnen.

Ist $\psi(z_i)$ vom Range ϱ, so ist auch jeder Teiler von $\psi(z_i)$ vom Range ϱ. Denn transformieren wir die Variablen z_i in neue Variablen ζ_i, so geht dabei jeder Teiler von $\psi(z_i)$ in einen Teiler der transformierten Potenzreihe über; ist aber die transformierte Potenzreihe einer solchen äqui-

[21]) Es sei etwa das folgende Problem genannt: Zwei gewöhnliche Potenzreihen $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ konvergieren in einer Umgebung des Nullpunktes und verschwinden im Nullpunkt. Gibt es stets eine Potenzreihe $h(x, y)$, die in einer Umgebung des Nullpunktes konvergiert, und dort für alle und nur diejenigen Wertepaare hinreichend kleiner x, y verschwindet, die mit einem hinreichend kleinen z beide Potenzreihen f, g zu 0 machen? M. a. W.: Man betrachte die Schnittkurve von zwei Flächen, die im Nullpunkte algebraischen Charakter haben. Hat stets ihre Projektion auf eine beliebige durch den Nullpunkt hindurchgehende Ebene im Nullpunkt algebraischen Charakter?

valent, die nur von ϱ Variablen ζ_i abhängt, so gilt auch für jeden ihrer Teiler dasselbe, nach dem Satze über die Eindeutigkeit der Zerlegung einer Potenzreihe in irreduzible Faktoren.

Wir kehren nun zu unserer Frage zurück und wählen für $\Phi(z_i)$ eine Differentialgleichung, der y formal genügt, und bei der $\Phi(z_i)$ vom möglichst niedrigen Range ϱ ist. Ist $\Phi(z_i) = \Phi^{(1)}(z_i)\,\Phi^{(2)}(z_i)$, wo $\Phi^{(1)}$ und $\Phi^{(2)}$ Potenzreihen sind, so genügt y formal einer der Gleichungen

$$\Phi^{(1)}(z_i) = 0, \quad \Phi^{(2)}(z_i) = 0.$$

Daher können wir für $\Phi(z_i)$ eine *irreduzible* Potenzreihe vom Range ϱ nehmen. Es gibt also eine lineare homogene umkehrbare Transformation

$$z_i = \sum \sigma_{ik}\zeta_k, \quad \zeta_i = \sum s_{ik} z_k, \tag{61}$$

durch welche $\Phi(z_i)$ in eine Potenzreihe $\bar{\Phi}(\zeta_i)$ übergeführt wird, für die die Darstellung gilt

$$\Phi(z_i) = \bar{\Phi}(\zeta_i) = \Psi(\zeta_i)\,E(\zeta_i),$$

wo $\Psi(\zeta_i)$ nur von ϱ der Variablen ζ_i abhängt, etwa von $\zeta_1, \ldots, \zeta_\varrho$, und E im Nullpunkt nicht verschwindet. Ist $\frac{1}{E(\zeta_i)} = e(z_i)$, so können wir, indem wir nötigenfalls $\Phi(z_i)$ durch $\Phi(z_i)e(z_i)$ ersetzen, erreichen, daß $\Phi(z_i)$ durch (61) *direkt* in eine Potenzreihe $\Psi(\zeta_i)$ übergeführt wird, die nur von ϱ Variablen $\zeta_1, \ldots, \zeta_\varrho$ abhängig ist. *Die Differentialgleichung $\Phi(z_i) = 0$ hat dann die gewünschte Eigenschaft.* Denn angenommen, es befriedigte y formal auch noch eine Gleichung $\Phi_1(z_i) = \frac{\partial \Phi(z_i)}{\partial z_1} = 0$ etwa. Aus der Identität:

$$\Phi_1(z_i) = \frac{\partial \Phi(z_i)}{\partial z_1} = \sum s_{k1} \frac{\partial \Psi(\zeta_i)}{\partial \zeta_k} = \Psi^*(\zeta_i)$$

folgt, daß auch $\Phi_1(z_i)$ durch (61) in eine Potenzreihe $\Psi^*(\zeta_i)$ von $\zeta_1, \ldots, \zeta_\varrho$ übergeht. Wir wenden nun auf $\Psi(\zeta_i)$ und $\Psi^*(\zeta_i)$ eine weitere lineare homogene Substitution an

$$\zeta_i = \sum \tau_{ik} u_k, \quad u_i = \sum t_{ik}\zeta_k, \quad (i = 1, \ldots, \varrho;\ k = 1, \ldots, \varrho), \tag{62}$$

durch welche wir erreichen, daß auf beide Potenzreihen der Weierstraßsche Vorbereitungssatz anwendbar wird. Und zwar können wir erreichen, daß in Ψ und Ψ^* nach Transformation freie Potenzen einer und derselben Variablen, etwa u_1, vorkommen. Denn sind die Aggregate der Glieder niedrigster Dimension in $\Psi(\zeta_i)$ und $\Psi^*(\zeta_i)$ etwa $a(\zeta_i)$ und $b(\zeta_i)$, so brauchen wir (62) nur so einzurichten, daß nach der Transformation (62) in den homogenen Formen a und b alle nach Dimension zulässige Potenzprodukte der u_i wirklich vorkommen. Wir können daher schreiben

$$\Psi(\zeta_i) = X(u_i) = E(u_i)\,\Pi(u_i) = E(u_i)(u_1^{\mu} + A^{(1)}(u_i)\,u_1^{\mu-1} + \ldots + A^{(\mu)}(u_i))$$

$$\Psi^*(\zeta) = X^*(u_i) = E^*(u_i)\,\Pi^*(u_i) =$$

$$= E^*(u_i)(u_1^{\nu} + A^{*(1)}(u_i)\,u_1^{\nu-1} + \ldots + A^{*(\nu)}(u_i)).$$

Hier sind $E(u_i)$, $E^*(u_i)$ im Nullpunkt nicht verschwindende Potenzreihen, $A^{(i)}$ und $A^{*(i)}$ aber Potenzreihen in $u_2, \ldots, u_\varrho$. Bilden wir nun die Resultante $P(u_2, \ldots, u_\varrho)$ von Π und Π^* in bezug auf u_1, so besteht eine Identität:

$$P(u_2, \ldots, u_\varrho) = B(u_i)\,\Pi(u_i) + B^*(u_i)\,\Pi^*(u_i)$$

der

(63) $$P(u_2, \ldots, u_\varrho) = C(u_i)\,X(u_i) + C^*(u_i)\,X^*(u_i).$$

Gehen wir nun zurück zu den ζ_i und z_i, so entsteht aus $P(u_2, \ldots, u_\varrho)$ eine Potenzreihe $R(z_i)$, deren Rang höchstens gleich $\varrho - 1$ ist, und für die sich aus (63) eine identische Beziehung ergibt von der Form

$$R(z_i) = D(z_i)\,\Phi(z_i) + D_1(z_i)\,\Phi_1(z_i).$$

Hieraus würde aber folgen, daß y auch der Gleichung $R(z_i) = 0$ formal genügt, und $R(z_i)$ ist vom Range $\varrho - 1$. Damit ist unsere obige Behauptung bewiesen.

Wir können also annehmen, daß keine der Gleichungen (60) formal befriedigt ist. Setzt man daher in eine von den Potenzreihen $\Phi_i(z)$ in (60) die Reihenentwicklung für y ein, und ordnet das Resultat nach reellen Teilen der Exponenten der einzelnen Glieder, was nach unseren Annahmen möglich ist, so werden nicht alle Glieder identisch verschwinden, und die Entwicklung wird mit einigen Gliedern anfangen, bei denen die reellen Teile der Exponenten einen möglichst kleinen Wert haben, etwa ν_i. Diese Glieder seien etwa:

(64) $$c_{i,\varkappa} x^{\lambda_{i,\varkappa}}.$$

Aus unseren Prämissen folgt weiter: Bricht man die Reihe für y irgendwo hinreichend weit ab, so ändern sich die Anfangsglieder der Entwicklungen der $\Phi_i(z)$ nicht. Die Exponenten $\lambda_{i,\varkappa}$ sind also lineare homogene ganzzahlige Kombinationen aus gewissen n_i. Wir trennen nun die Reihe für y in zwei Teile

$$y = A_t(x) + R_t(x) = \sum_{i=0}^{i=t-1} a_i x^{n_i} + \sum_{i=t}^{i=\infty} a_i x^{n_i}$$

und nehmen dabei t von vornherein so groß, daß bereits von diesem t an bei der Einsetzung von $A_t(x)$ für y die Anfangsglieder der Φ_i die Aggregate der Ausdrücke (64) sind. Wir bezeichnen nun $A_t(x), A_t'(x), \ldots, A_t^{(n)}(x)$ mit $u_2, u_3, \ldots, u_{n+2}$, und $R_t(x), R_t'(x), \ldots, R_t^{(n)}(x)$ mit $v_2, v_3, \ldots, v_{n+2}$,

wo die Indizes denen der z_i entsprechend gewählt sind. Die u_i und v_i hängen dabei noch von t ab.

Wir wollen nun $\Phi(z_i)$ nach Potenzen der v_i entwickeln. Zu dem Zwecke bedenken wir, daß, solange der reelle Teil des Anfangsgliedes von $y^{(i)}$ nicht negativ ist, $z_{i+2} = y^{(i)} - c_i = (u_{i+2} - c_i) + v_{i+2}$ ist, so daß wir zur Entwicklung nach Potenzen dieser v_{i+2} einfach den Taylorschen Lehrsatz direkt zu benutzen haben. Hat dagegen das Anfangsglied $b_i x^{\mu_i}$ von $y^{(i)}$ einen Exponenten mit negativem reellem Teil, so ist

$$(65)\quad z_{i+2} = \frac{1}{u_{i+2}+v_{i+2}} = \frac{1}{b_i} x^{-\mu_i} \frac{1}{\frac{u_{i+2}}{b_i x^{\mu_i}} + \frac{v_{i+2}}{b_i x^{\mu_i}}} = \frac{1}{b_i} x^{-\mu_i} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{u_{i+2}}{b_i x^{\mu_i}} - 1 + \frac{v_{i+2}}{b_i x^{\mu_i}} \right)^k$$

Hier haben $\frac{u_{i+2}}{b_i x^{\mu_i}} - 1$ und $\frac{v_{i+2}}{b_i x^{\mu_i}}$ lauter Glieder mit verschiedenen Exponenten, und die reellen Teile der Exponenten aller Glieder von $\frac{v_{i+2}}{b_i x^{\mu_i}}$ sind, sobald t hinreichend groß genommen ist, größer als die Exponenten der Glieder von $\frac{u_{i+2}}{b_i x^{\mu_i}}$. Wir bemerken endlich, daß die Entwicklungen der aus (65) formal gebildeten Ableitungen von z_{i+2} nach v_{i+2} für $v_{i+2} = 0$ lauter Exponenten haben, deren reelle Teile nicht negativ sind. Die Formel (65) zeigt, daß man bei der Entwicklung von $\Phi(z_i)$ nach Potenzen der v_i den Taylorschen Lehrsatz benutzen kann. Bezeichnen wir noch für $i \geqq 0$ allgemein $u_{i+2} - c_i$ bzw. $\frac{1}{u_{i+2}}$ durch w_{i+2} (es ist also $w_{i+2} = (z_{i+2})_{v_{i+2}=0}$), so gilt die Entwicklung

$$(66)\quad \Phi(z) = \Phi(x, w) + \sum v_i \left(\frac{\partial \Phi(x,z)}{\partial v_i} \right)_{z_s = w_s} + \sum v_i v_k \left(\frac{\partial^2 \Phi(x,z)}{\partial v_i \partial v_k} \right)_{z_s = w_s} + \cdots$$

Hier sind alle Differentiationen so auszuführen, daß man zuerst nach z_i differentiiert und dann z_i nach v_i (entweder aus $z_i = u_i + v_i$, oder aus $z_i = \frac{1}{u_i + v_i}$) differentiiert. Nun bedenken wir aber, daß die Exponenten der einzelnen Glieder in den Entwicklungen der Ableitungen von z_i nach v_i nicht negativen reellen Teil haben. Ebenso enthalten die partiellen Ableitungen von $\Phi(z_i)$ nach den z_i nur solche Glieder, deren Exponenten nicht negative reelle Teile haben, und dies ist auch dann der Fall, wenn wir die z_i durch die w_i ersetzen. Aus alledem folgt, daß die reellen Teile der Exponenten der einzelnen Glieder in den Summen

$$\sum v_i v_k \left(\frac{\partial^2 \Phi(x,z)}{\partial v_i \partial v_k} \right)_{z_s = w_s}, \quad \sum v_i v_k v_l \left(\frac{\partial^3 \Phi(x,z)}{\partial v_i \partial v_k \partial v_l} \right)_{z_s = w_s}, \cdots$$

nicht kleiner sind als $2\sigma_i$, wo σ_i der reelle Teil des Exponenten von $a_i x^{\alpha_i}$ ist.

Wir haben oben den Taylorschen Lehrsatz benutzt, obgleich die Bedeutung der Entwicklung (66) natürlich eine ganz andere ist als gewöhnlich. Die u_i und v_i sind nicht hinreichend kleine *Zahlen*, sondern Potenzreihen in x. Die Gleichung (66) bedeutet, daß, wenn man rechts und links für die z_i und für die v_i ihre Reihenentwicklungen in x einsetzt und dann formal umordnet, auf der rechten und linken Seite genau dieselben Glieder vorkommen. Dieses Umordnen ist aber stets ohne Ausführung von Grenzprozessen möglich, da nach unseren Voraussetzungen über die u_i stets nur *endlich* viele Glieder entstehen können, die dieselben Exponenten haben.

Wir könnten die Gleichungen (65), (66) auch als *Kongruenzen* deuten nach hinreichend hohen positiven Potenzen x^ϱ von x als Modul, in dem Sinne, daß von allen Potenzen von x, deren Exponenten den reellen Teil größer als ϱ haben, abzusehen ist. Dann kommen auf beiden Seiten der Gleichungen (65) und (66) für jedes ϱ stets nur endlich viele Glieder in Betracht, und die Gleichungen (65), (66) besagen, daß die entsprechenden Kongruenzen für jedes ϱ gelten. — Und da bei unseren Entwicklungen, die zur Gleichung (66) führen, stets als Koeffizienten Potenzreihen in x auftreten, bei denen die Exponenten der einzelnen Glieder nichtnegative reelle Teile haben, so ist klar, warum wir den Taylorschen Lehrsatz (und die Regel über die Differentiation einer Funktion von einer Funktion) benutzen dürfen.

Wir fassen nun die erste Summe auf der rechten Seite von (66) ins Auge

$$\sum v_i \left(\frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial v_i}\right)_{z_s = w_s}.$$

Ist für irgend ein $i > 1$ das zugehörige $z_i = u_i + v_i$, so ist der Koeffizient von v_i gleich

$$\Phi_i(x, w_2, \ldots, w_{n+2}).$$

Ist aber $z_i = \frac{1}{u_i + v_i}$, so ist der Koeffizient von v_i gleich

$$\Phi_i(x, w_2, \ldots, w_{n+2}) \cdot \frac{-1}{u_{i+2}^2}.$$

Wir suchen nun die Glieder von (66), deren Exponenten den kleinsten reellen Teil haben. Für i, für welche $z_i = u_i + v_i$ ist, sind die Anfangsglieder von $v_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v_i}\right)_{z_s = w_s}$ für hinreichend große t gleich

$$(i-2)! \binom{n_t}{i-2} a_t x^{n_t - i + 2} c_{i,\varkappa} x^{\lambda_{i,\varkappa}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots). \tag{67}$$

Ist der reelle Teil von n_t gleich σ_t, so ist der reelle Teil der Exponenten der Glieder (67) gleich $\sigma_t + \nu_i - i + 2$. Ist aber $z_i = \frac{1}{u_i + v_i}$, so kommt

$$(68) \qquad -(i-2)!\binom{n_t}{i-2} a_t x^{n_t-i+2} c_{i,\varkappa} x^{\lambda_{i,\varkappa}} \frac{1}{b_i^2} x^{-2\mu_i} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots),$$

wo $b_i x^{\mu_i}$ das Anfangsglied von u_i ist. Ist der reelle Teil von μ_i gleich ϱ_i, so ist der reelle Teil der Exponenten von (68) gleich

$$\sigma_t + \nu_i - 2\varrho_i - i + 2.$$

Hier sind die Zahlen ν_i, ϱ_i von t unabhängig. Wir bringen im Aggregat der Glieder (67) und (68) $a_t x^{n_t}$ vor die Klammer und ordnen dann die Glieder innerhalb der Klammer nach ihren Exponenten. Wir erhalten dann

$$a_t x^{n_t} \sum \varphi_s(n_t) x^{k_s},$$

wo k_s lauter verschiedene komplexe Zahlen sind, $\varphi_s(n_t)$ aber Polynome in n_t mit festen von t unabhängigen Zahlenkoeffizienten. Alle $\varphi_s(n_t)$ können offenbar nicht identisch in n_t verschwinden, da in (67) und (68) i lauter verschiedene Werte annimmt, und daher n_t in n-ter Potenz nur einmal — in $\binom{n_t}{n}$ — vorkommt. Ist nun k etwa ein k_s, bei dem der reelle Teil möglichst klein ist, und der Koeffizient $\varphi(n_t)$ von x^k von 0 verschieden, so kann $\varphi(n_t)$ jedenfalls nur für endlich viele n_t verschwinden. Von einem gewissen t an muß sich also das Glied

$$a_t \varphi(n_t) x^{n_t+k}$$

entweder mit einem Glied aus der zweiten, dritten Summe auf der rechten Seite von (66) wegheben, oder mit einem Glied von $\Phi(x, w)$. Die reellen Teile der Exponenten der Glieder der zweiten, dritten, ... Summe der rechten Seite von (66) sind aber nicht kleiner als $2\sigma_t$, also von einem gewissen t an sicher größer als der reelle Teil von $\sigma_t + k$. Daher muß bei der Entwickelung von $F(x, w_2, \ldots, w_{n+2})$ sich wenigstens ein Glied ergeben, dessen Exponent gleich $n_t + k$ ist. Die Exponenten der Glieder von $\Phi(x, w)$ setzen sich aber linear ganzzahlig aus $1, n_0, n_1, \ldots, n_{t-1}$ zusammen. Ebenso setzt sich k aus 1 und endlich vielen n_i linear ganzzahlig zusammen. Daraus folgt aber, daß alle n_i sich linear ganzzahlig durch endlich viele aus ihnen ausdrücken lassen, w. z. b. w.

Im Satz 21 haben wir für sehr ausgedehnte Klassen von nach beliebigen Potenzen des Argumentes fortschreitenden Reihen die Eigenschaft formuliert, keiner analytischen partiellen Differentialgleichung *formal* zu genügen. Wir wollen nun diese Eigenschaft auf durch solche Reihen darstellbare ***Funktionen*** ausdehnen.

Um dies zu erreichen, verlangen wir von den Exponenten $n_i = \sigma_i + \sqrt{-1}\tau_i$ erstens, daß $\lim_{i=\infty} \sigma_i = +\infty$ ist, zweitens, daß $\left|\frac{\tau_i}{\sigma_i}\right|$ von einem gewissen i an beschränkt bleibt. Dies bedeutet, geometrisch gesprochen, daß alle n_i von

inem gewissen i an innerhalb eines Winkels von der Öffnung $\gamma < \pi$ liegen, er den positiven Teil der reellen Aches einschließt, die imaginäre Achse agegen (bis auf den Nullpunkt) vollständig außerhalb läßt.

Um die auf die Konvergenz der Reihe (57) bezügliche Annahme zu ormulieren, führen wir den Begriff der *absoluten Konvergenz im schärferen Sinne* ein. Wir nennen eine Reihe $\sum a_i x^{n_i}$ mit komplexen Exponenten $n_i = \sigma_i + \sqrt{-1}\tau_i$, die den obigen Bedingungen genügen, absolut konvergent m schärferen Sinne für $|x| = \nu$, falls die Reihe $\sum |a_i| \nu^{\sigma_i} e^{2\pi|\tau_i|}$ konver-giert. Eine solche Reihe konvergiert absolut auf dem ganzen Kreise $|x| = \nu$, sowie in jedem vom Nullpunkt verschiedenen Punkt innerhalb ieses Kreises, und absolut im schärferen Sinn auf jedem konzentrischen Kreise mit kleinerem Radius. Konvergiert $\sum a_i x^{n_i}$ für $|x| = \nu$ absolut m schärferen Sinn, so konvergiert die formal gebildete Ableitung $\sum n_i a_i x^{n_i - 1}$ dieser Reihe absolut im schärferen Sinn für $|x| = \nu - \varepsilon$, wo ε eine beliebig kleine feste positive Größe ist. Denn um dies zu be-weisen, haben wir aus der Konvergenz von $\sum \alpha_i \nu^{\sigma_i} e^{2\pi|\tau_i|}$, wo $|a_i| = \alpha_i$ esetzt ist, die Konvergenz der Reihe $\sum \alpha_i |\sigma_i + \sqrt{-1}\tau_i| (\nu - \varepsilon)^{\sigma_i - 1} e^{2\pi|\tau_i|}$ zu olgern. Dies folgt aber aus

$$\lim_{i=\infty} |\sigma_i + \sqrt{-1}\tau_i| \frac{(\nu-\varepsilon)^{\sigma_i - 1}}{\nu^{\sigma_i}} = \left|\frac{\sigma_i + \sqrt{-1}\tau_i}{\sigma_i}\right| \sigma_i \frac{(\nu-\varepsilon)^{\sigma_i-1}}{\nu^{\sigma_i}} = 0.$$

Denn $\frac{\sigma_i + \sqrt{-1}\tau_i}{\sigma_i}$ ist von einem gewissen i an absolut beschränkt und im $\sigma_i \left(\frac{\nu - \varepsilon}{\nu}\right)^{\sigma_i} = 0$. Hieraus folgt, daß jede formal gebildete Ableitung von $\sum a_i x^{n_i}$ absolut im schärferen Sinn für $|x| = \nu - \varepsilon$ konvergiert. Und us der Gleichmäßigkeit der Konvergenz, die sich aus dem weiter unten olgenden Beweis des Eindeutigkeitssatzes ergibt, folgt, daß die formal gebil-eten Ableitungen die Ableitungen der durch die ursprüngliche Reihe dar-estellten Funktion darstellen.

Konvergiert $\sum a_i x^{n_i}$ absolut im schärferen Sinn, und sind alle σ_i ositiv, so wird auch, wie wir sofort ausführlich beweisen werden, die Majorante $\sum \alpha_i \nu^{\sigma_i} e^{2\pi|\tau_i|}$ mit kleiner werdendem ν beliebig klein. Daraus olgt, daß auch das Resultat der Einsetzung von (57) in die linke Seite on (58) auf einem gewissen Kreise um den Nullpunkt absolut im schärfe-en Sinne konvergiert und dort das Resultat der Einsetzung der durch 57) dargestellten Funktion in (58) darstellt. Es bleibt daher nur die Ein-eutigkeit zu beweisen: Konvergiert eine Reihe $\sum a_i x^{n_i}$ auf einem Kreise m den Nullpunkt absolut im schärferen Sinn, und ist dort die durch ie dargestellte Funktion gleich 0, so verschwinden alle Koeffizienten a_i.

Wir können offenbar annehmen, daß alle $n_i = \sigma_i + \sqrt{-1}\tau_i$ untereinander verschieden sind und daß σ_i mit i nichtabnehmend geordnet sind. Wir können weiter annehmen, daß die ersten $k (k > 0)$ σ_i verschwinden, da dies sonst durch Multiplikation mit $x^{-\sigma_0}$ zu erreichen ist. Es sei also $\sigma_0 = \ldots = \sigma_k = 0$, $\sigma_{k+1} > 0$. Wir behaupten zuerst, daß jedem positiven ε ein solches δ zugeordnet werden kann, daß $|\sum_{k+1}^{\infty} a_i x^{n_i}| < \varepsilon$ ist, sobald $|x| < \delta$ wird. Es sei allgemein $|a_i| = \alpha_i$. Aus der absoluten Konvergenz im schärferen Sinn von $\sum a_i x^{n_i}$ folgt, daß die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i e^{2\pi|\tau_i|} e^{-\sigma_i s} \tag{69}$$

in einer gewissen s-Halbebene absolut und daher gleichmäßig konvergiert. Daraus folgt, daß man ein solches δ_1 angeben kann, daß der absolute Betrag von (69) kleiner als ε wird, sobald der reelle Teil von s größer als δ_1 wird. Daraus folgt aber, daß der absolute Betrag von $\sum_{i=k+1}^{\infty} a_i x^{n_i}$ kleiner als ε wird, sobald $|x| < \delta = e^{-\delta_1}$ wird.

Infolgedessen müßte, wenn alle Koeffizienten $a_0, \ldots, a_k$ von 0 verschieden wären, die Summe $a_0 x^{\sqrt{-1}\tau_0} + \ldots + a_k x^{\sqrt{-1}\tau_k}$ zugleich mit x gegen 0 konvergieren. Es wird also genügen, zu zeigen, daß eine solche Folge der reellen ins Unendliche wachsenden Werte von s existiert, daß

$$f(s) = a_0 e^{\sqrt{-1}s\tau_0} + \ldots + a_k e^{\sqrt{-1}s\tau_k}$$

gegen einen von 0 verschiedenen Wert konvergiert. Die ganze Funktion $f(s)$ kann nicht identisch verschwinden. Denn sonst müßte sie auch für rein imaginäre $s = \sqrt{-1}t$ verschwinden, und in $f(s)$ würde für hinreichend großes t ein Glied überwiegen, da $\tau_0, \ldots, \tau_k$ untereinander verschieden sind. Es sei für ein reelles $s = s_0$ etwa $f(s_0) + 0$. Es sei m eine beliebig große ganze positive Zahl. Dann gibt es bekanntlich eine solche von 0 verschiedene mit Hilfe der bekannten Dirichletschen Schlußweise zu findende ganze positive Zahl s_m, daß die Zahlen $s_m\tau_0, \ldots, s_m\tau_k$ sich von gewissen ganzzahligen Vielfachen von 2π um weniger als $\frac{1}{m^2}$ unterscheiden. Und folglich wird der Wert von $f(s_0 + ms_m)$ mit wachsendem m gegen $f(s_0) + 0$ konvergieren. W. z. b. w.

Wir können das Resultat zusammenfassen im

Satz 22. *Hat eine absolut im schärferen Sinn konvergente Reihe*

$$y(x) = \sum a_i x^{n_i} \qquad (n_i = \sigma_i + \sqrt{-1}\tau_i$$

ie Eigenschaft, daß 1. $\operatorname{Lim} \sigma_i = +\infty$ *ist*; 2. $\left|\frac{\tau_i}{\sigma_i}\right|$ *von einem gewissen* i *n beschränkt bleibt*; 3. *ist* σ_i *das kleinste* σ, *zu dem ein von* 0 *verchiedenes* τ *gehört, und sind alle kleineren* σ *ganze nicht negative Zahlen, o ist* σ_i *keine ganze nicht negative Zahl und es gibt keinen zweiten Exponenten* n *mit demselben* σ_i; *genügt ferner die Funktion* $y(x)$ *einer Differentialgleichung, deren linke Seite analytisch in* $x, y - c, y' - c_1, \ldots,$ $^{(n)} - c_n, \frac{1}{y^{(n+1)}}, \ldots, \frac{1}{y^{(n+m)}}$ *ist, wo die reellen Teile der Exponenten der Anfangsglieder von* $x, y - c, y' - c_1, \ldots, y^{(n)} - c_n, \frac{1}{y^{(n+1)}}, \ldots, \frac{1}{y^{(n+m)}}$ *nicht egativ und* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *endliche Konstanten sind, so besitzen die Exponenten* n_i *eine endliche ganzzahlige Basis.*

In diesem Satze ist zugleich eine Verallgemeinerung des Satzes 12 uf den Fall enthalten, wo die Exponenten komplex sind[22]). Die Substitution $x = e^{-s}$ führt dann zu einem dem Satz 12 ganz analogen Satz ber Dirichletsche Reihen $\sum a_i e^{-\lambda_i s}$, wo λ_i komplex sind, und eine nalog zu formulierende Forderung der absoluten Konvergenz im schärferen inn zu stellen ist.

Bei der Formulierung des am Anfang dieses Paragraphen aufgestellten atzes haben wir über die Gestalt der Differentialgleichung (58) Annahmen emacht, die noch etwas allgemeiner gefaßt werden könnten. Indessen ilt wahrscheinlich der Satz, daß unter den Exponenten n_i nur endlich iele linear unabhängige vorkommen, auch dann, wenn F eine nach beebigen ganzen positiven und negativen Potenzen ihrer Argumente fortchreitende, in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes konvergente otenzreihe ist. Dieser Fall ist jedoch den Methoden, die in diesem aragraphen zur Anwendung gebracht worden waren, nicht mehr zugänglich. er Grund, warum die Gültigkeit des Satzes 21 und 22 auch in diesem alle plausibel erscheint, ist leicht zu übersehen. Würden unter den xponenten n_i unendlich viele linear unabhängige vorkommen, so würden ir durch wiederholten Umlauf um den Nullpunkt wenigstens formal nendlich viele willkürliche Konstanten in das Integral hineinbringen önnen. Diese Schlußweise läßt sich in vielen Fällen vollständig durch ihren. So kann man z. B. mit ihrer Hilfe beweisen, daß Funktion $\sum_{i=1}^{\infty} x^{\log p_i}$, wo p_i die i-te Primzahl ist, keiner Differentialgleichung

[22]) In der Tat läßt sich jede algebraische Differentialgleichung, deren linke Seite n Polynom in x, der unbekannten Funktion und ihren Ableitungen ist, eventuell rch Division mit einem Potenzprodukt aus der unbekannten Funktion und ihren bleitungen auf die Form (58) bringen.

genügt, deren linke Seite in einer Umgebung des Nullpunktes eine eindeutige im allgemeinen analytische Funktion der Ableitungen wäre. Und analoge Potenzreihen lassen sich bei mehreren Variablen bilden. So läßt sich z. B. die analoge Tatsache für die Reihe

$$\sum x^n y^{\log n}$$

beweisen, die aus der Reihe $\sum x^n n^{-s}$ durch eine einfache Substitution entsteht. Und damit ist dann ein neuer — dritter — Beweis der Eigenschaft der Reihe $\sum x^n n^{-s}$ gegeben, keiner algebraischen partiellen Differentialgleichung zu genügen. Ich werde diese Bemerkungen an einer anderen Stelle ausführen und dabei auf den engen Zusammenhang eingehen, in dem sie mit einer bekannten, zuerst von Herrn H. Bohr in der Theorie der Riemannschen ζ-Funktion verwendeten Schlußweise stehen.

(Eingegangen am 3. Februar 1919.)

emerkungen über Vertauschung von Limes und Integral.

Von

Max von Pidoll in München.

Der bekannte Satz der Integralrechnung[1]):

„*Ist für* $a \leqq x \leqq b$ *und für* $\nu = 1, 2, \ldots$ $f_\nu(x)$ *eine Folge gleichäßig-beschränkter, integrierbarer Funktionen, die gegen eine integrierre Funktion* $f(x)$ *konvergieren, so ist auch* $\lim\limits_{\nu \to \infty} \int\limits_a^b f_\nu(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx$“

bekanntlich von Henri Lebesgue unter Zugrundelegung seiner Defition des Integrals dahin erweitert worden, daß an Stelle der *gleichmäßigen eschränktheit* der Funktionenfolge nur vorausgesetzt wird, daß die $|f_\nu(x)|$ r alle $\nu = 1, 2, \ldots$ unterhalb einer festen, von ν unabhängigen summierren Funktion liegen. Dagegen scheint bisher merkwürdgerweise noch cht beobachtet worden zu sein, daß man den oben angeführten Satz in r älteren Theorie der bestimmten Integrale in der *einfachsten Weise* in öllig analoger Art erweitern kann, ohne die Lebesguesche Theorie als kannt vorauszusetzen. Da dies zum Zwecke elementarer Anwendungen wünscht scheinen kann, so soll im folgenden der Satz bewiesen werden:

Ist für $a \leqq x \leqq b$ $f_\nu(x)$ *eine Folge von (nicht notwendig beschränkten) unktionen, für die* $\lim\limits_{\nu \to \infty} f_\nu(x) = f(x)$, *und sind sowohl* $f_\nu(x)$ *als* $f(x)$ *eichzeitig mit ihrem absoluten Betrag integrabel, bleiben ferner die*

[1]) Einer verbreiteten Meinung gegenüber sei darauf hingewiesen, daß dieser tz genau in der angegebenen Allgemeinheit zuerst von Cesare Arzelà ausgerochen und mit einem leicht zu ergänzenden Beweis versehen worden ist (Accamia dei Lincei. Rendiconti, I, Serie 4. Seduta del 21 giugno 1885, S. 532—540; Nr. 2. und 4. auf S. 537 und 538.). Unabhängig davon hat ihn später W. F. good für den speziellen Fall stetiger Funktionen wiedergefunden und bewiesen mer. Journal of Mathematics, **XIX** (1897), S. 155—190). Für den einfachsten Beis siehe E. Landau, diese Zeitschrift, 2 (1918), S. 350—351.

$|f_\nu(x)|$ *für jedes* $\nu = 1, 2, \ldots$ *unterhalb einer von* ν *unabhänigen integrablen Funktion* $\Phi(x)$:

$$|f_\nu(x)| \leqq \Phi(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

so gilt

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_a^b f_\nu(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

I. Eine im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierte, nicht notwendig beschränkte, nicht negative Funktion sei daselbst — mit geringfügiger Modifikation der Definition von de la Vallée Poussin — „integrabel" genannt, wenn sie folgenden beiden Bedingungen genügt:

a) Die Menge der Unstetigkeitsstellen der Funktion sei vom (Lebesgueschen) Maß Null.

b) Zu jeder natürlichen Zahl λ sei die Funktion $f^{(\lambda)}(x)$ gebildet, die an jeder Stelle x gleich der kleineren der beiden Zahlen λ und $f(x)$ ist: $f^{(\lambda)}(x) = \text{Min}\,(\lambda, f(x))$. Da bei der Bildung der $f^{(\lambda)}(x)$ keine Stetigkeitsstelle von $f(x)$ verloren geht, so ist jedes $f^{(\lambda)}(x)$ eine nach Riemann integrierbare Funktion (wegen ihrer Beschränktheit und auf Grund von a) nach einem bekannten Satz (vgl. etwa Henri Lebesgue, Leçons sur l'Intégration, 1904, S. 29)). Ist nun die Folge der Integrale über die $f^{(\lambda)}(x)$ für $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ beschränkt, so heißt die Funktion $f(x)$ integrabel und ihr Integral ist definiert durch:

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b f^{(\lambda)}(x)\,dx.$$

Ist $\varphi(x)$ eine weitere Funktion, die der Bedingung a) genügt und für welche $0 \leqq \varphi(x) \leqq f(x)$, so ist auch $\varphi^{(\lambda)}(x) \leqq f^{(\lambda)}(x)$ und $\varphi(x)$ ist ebenfalls integrabel. Des weiteren gilt aber für $\varrho = 1, 2, \ldots$:

$$(2) \qquad 0 \leqq \varphi^{(\lambda+\varrho)}(x) - \varphi^{(\lambda)}(x) \leqq f^{(\lambda+\varrho)}(x) - f^{(\lambda)}(x).$$

Denn falls $\varphi(x) \leqq \lambda$, ist $\varphi^{(\lambda)}(x) = \varphi^{(\lambda+\varrho)}(x) = \varphi(x)$, also das mittlere Glied Null; ist dagegen $\varphi(x) > \lambda$, so ist $\varphi^{(\lambda)}(x) = f^{(\lambda)}(x) = \lambda$, also reduziert sich (2) auf: $\lambda \leqq \varphi^{(\lambda+\varrho)}(x) \leqq f^{(\lambda+\varrho)}(x)$.

Aus (2) folgt nun durch Riemannsche Integration:

$$0 \leqq \int_a^b \varphi^{(\lambda+\varrho)}(x)\,dx - \int_a^b \varphi^{(\lambda)}(x)\,dx \leqq \int_a^b f^{(\lambda+\varrho)}(x)\,dx - \int_a^b f^{(\lambda)}(x)\,dx,$$

also beim Grenzübergang $\lim \varrho = \infty$ für jedes $\lambda = 1, 2, \ldots$:

$$(3) \qquad 0 \leqq \int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b \varphi^{(\lambda)}(x)\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f^{(\lambda)}(x)\,dx.$$

Gilt nun für jedes $\nu = 1, 2, \ldots$:

4) $$0 \leqq f_\nu(x) \leqq \Phi(x)$$

und sind alle $f_\nu(x)$ und $\Phi(x)$ integrabel, so folgt aus $\lim_{\nu\to\infty} f_\nu(x) = 0$ auch

5) $$\lim_{\nu\to\infty} \int_a^b f_\nu(x)\,dx = 0.$$

Denn auf Grund der gemachten Annahme über $\Phi(x)$ kann man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\lambda(\varepsilon)$ so bestimmen, daß

6) $$0 \leqq \int_a^b \Phi(x)\,dx - \int_a^b \Phi^{(\lambda)}(x)\,dx \leqq \varepsilon.$$

Infolge von (3) gilt dann wegen (4):

7) $$0 \leqq \int_a^b f_\nu(x)\,dx - \int_a^b f_\nu^{(\lambda)}(x)\,dx \leqq \varepsilon$$

mit dem *selben* λ gleichmäßig für alle $\nu = 1, 2, \ldots$.

Die $f_\nu^{(\lambda)}$ sind alle $\leqq \lambda$, also gleichmäßig beschränkt, also ist nach dem eingangs angeführten Satz:

8) $$\lim_{\nu\to\infty} \int_a^b f_\nu^{(\lambda)}(x)\,dx = 0,$$

also gilt wegen der Willkürlichkeit von ε auf Grund von (7) auch (5).

Hieraus ergibt sich aber durch ganz geläufige Umformungen das angegebene Resultat.

II. Die in dem Satze angeführten Bedingungen sind zwar hinreichend, aber keineswegs notwendig. Um dies an einem einfachen Beispiele zu zeigen, sei im Intervalle $0 \leqq x \leqq 1$: $f_\nu(x) = \frac{1}{\nu}\cdot 2^\nu$, falls $\frac{1}{2^\nu} < x \leqq \frac{1}{2^{\nu-1}}$, sonst $f_\nu(x) = 0$. Dann ist $\lim_{\nu\to\infty} f_\nu(x) = 0$ und $\int_0^1 f_\nu(x)\,dx = \frac{1}{\nu}$, also $\lim_{\nu\to\infty} \int_0^1 f_\nu(x)\,dx = 0$. Dagegen ist für die obere Grenze $\Phi(x)$ aller $f_\nu(x)$: $\Phi(x) = \frac{1}{\nu}\cdot 2^\nu$ für $\frac{1}{2^\nu} < x \leqq \frac{1}{2^{\nu-1}}$, $\Phi(0) = 0$, und $\Phi(x)$ ist offenbar *nicht* integrabel.

III. Man kann dem oben benutzten Arzelàschen Satze leicht eine allgemeinere Fassung geben. Sind nämlich die $f_\nu(x)$ gleichmäßig beschränkt, aber nicht notwendig nach Riemann integrierbar und ist $\lim_{\nu\to\infty} f_\nu(x) = 0$, so gilt noch für die *unteren* Riemannschen Integrale $\lim_{\nu\to\infty} \underline{\int} f_\nu(x)\,dx = 0$. Der Beweis ergibt sich durch eine mühelose An-

wendung eines Hilfssatzes von Fritz Hartogs (Math. Ann., 62 (1905), S. 6), der sich wiederum am einfachsten aus dem Arzelàschen Lemma herleiten läßt (der Beweis des Lemmas bei Hartogs, Schwarz-Festschrift, 1914, S. 55). Kombiniert man dieses Resultat mit dem Beweisgang von Nr. I, so erhält man schließlich:

Ist $\lim_{\nu\to\infty} f_\nu(x) = 0$, $0 \leqq f_\nu(x) \leqq \Phi(x)$, *wo* $\Phi(x)$ *integrabel ist, so gilt für die unteren de la Vallée Poussinschen Integrale*

$$\lim_{\nu\to\infty} \underline{\int} f_\nu(x)\,dx = 0 \text{ [2]}.$$

München, den 15. Februar 1920.

---

[2]) Die Definition dieser Integrale siehe etwa bei Pierpont, Theory of Functions of Real Variables, 2 (1912), S. 31.

(Eingegangen am 10. März 1920.)

Ungleichheitsbeziehungen für die Ableitungen einer Potenzreihe, die eine im Einheitskreise beschränkte Funktion darstellt.

Von

Otto Szász in Frankfurt a. M.

Die Potenzreihe mit beliebigen (komplexen) Koeffizienten

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$$

ei für $|z| < 1$ konvergent, und es sei

E) $$\left| \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu \right| = |f(z)| \leqq 1 \quad \text{für} \quad |z| < 1;$$

enn diese Bedingung erfüllt ist, so sagen wir kurz, daß die Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ zur Klasse (E) gehört. In Verallgemeinerung gewisser Resultate on Landau und Fejér hatte ich folgenden Satz gefunden[1]):

Satz A. Es sei

$$(\lambda_0 + \lambda_1 z + \ldots + \lambda_n z^n)^2 = \mu_0 + \mu_1 z + \ldots + \mu_n z^n + \ldots$$

nd

$$\lambda_0 + \lambda_1 z + \ldots + \lambda_n z^n \neq 0 \quad \text{für} \quad |z| < 1,$$

ann ist für jede Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$, die zur Klasse (E) gehört,

$$|\mu_n c_0 + \mu_{n-1} c_1 + \ldots + \mu_0 c_n| \leqq |\lambda_0|^2 + |\lambda_1|^2 + \ldots + |\lambda_n|^2,$$

nd Gleichheit gilt nur für

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu \equiv e^{\gamma i} \frac{\bar{\lambda}_n + \bar{\lambda}_{n-1} z + \ldots + \bar{\lambda}_0 z^n}{\lambda_0 + \lambda_1 z + \ldots + \lambda_n z^n};$$

---

[1]) Vgl. O. Szász, Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe, Math. eitschr., 1 (1918), S. 163—183. Daselbst au ch Literaturnachweis

hier bedeutet γ eine beliebige reelle Konstante und $\bar{\lambda}_\nu$ die zu λ_ν konjugierte komplexe Zahl.

Im folgenden wende ich einen Spezialfall dieses Satzes an, um, wenigstens teilweise, die Frage zu beantworten: Was ist für ein $|\zeta|<1$ die obere Grenze von $|f^{(n)}(\zeta)|$ in der Klasse (E)? Ich finde die Ungleichung

$$(U) \qquad |f^{(n)}(\zeta)| \leqq \frac{n!}{(1-|\zeta|^2)^n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\frac{n-1}{2}}{\nu}^2 |\zeta|^{2\nu} \qquad (n=1,2,3,\ldots);$$

bei ungeradem $n=2m+1$ gilt hier nur für

$$f(z)=e^{\gamma i} z^m \left(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}\right)^{m+1} \qquad (\gamma \text{ eine reelle Konstante})$$

das Gleichheitszeichen. Für $n=2$ wird aus (U)

$$|f''(\zeta)| \leqq \frac{1}{(1-|\zeta|^2)^3}\left(2+\frac{1}{2}|\zeta|^2+\frac{1}{32}|\zeta|^4\right),$$

und Gleichheit gilt hier nur im Falle

$$f(z)=e^{\gamma i}\,\frac{(z-\zeta)^2+\frac{1}{2}\zeta(z-\zeta)(1-\bar{\zeta}z)-\frac{1}{8}\zeta^2(1-\bar{\zeta}z)^2}{(1-\bar{\zeta}z)^2+\frac{1}{2}\bar{\zeta}(z-\zeta)(1-\bar{\zeta}z)-\frac{1}{8}\bar{\zeta}^2(z-\zeta)^2}.$$

Für $n=4, 6, 8, \ldots$ liefert (U) nur bei hinreichend kleinem $|\zeta|$ die genaue Schranke, während ihre Bestimmung bei beliebigem $|\zeta|<1$ noch aussteht.

Für $n=1$ reduziert sich (U) auf die bekannte Relation

$$|f'(\zeta)| \leqq \frac{1}{1-|\zeta|^2}.$$

1. Es sei erstens

$$\mu_0=1,\ \mu_1=0,\ \ldots,\ \mu_n=0, \quad \text{also} \quad \lambda_0=1,\ \lambda_1=0,\ \ldots,\ \lambda_n=0,$$

dann folgt aus Satz A die Cauchysche Ungleichung:

$$(1) \qquad |c_n| \leqq 1 \qquad (n=0,1,2,\ldots),$$

und Gleichheit gilt hier nur für

$$\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu z^\nu \equiv e^{\gamma i} z^n.$$

Es sei zweitens

$$\mu_0=1,\ \mu_1=(n-1)v,\ \mu_2=\binom{n-1}{2}v^2,\ \ldots,\ \mu_{n-1}=\binom{n-1}{n-1}v^{n-1},\ \mu_n=0,$$

wobei $|v|<1$.

Jetzt wird

$$\sum_{\nu=0}^{n} \mu_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\nu} v^\nu z^\nu = (1+vz)^{n-1},$$

nd somit

$$\lambda_\nu = \binom{\frac{n-1}{2}}{\nu} v^\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Für $n = 1$ reduziert sich dies auf

$$\mu_0 = 1, \ \mu_1 = 0; \quad \lambda_0 = 1, \ \lambda_1 = 0.$$

Ist n ungerade

$$n = 2m + 1 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

o wird

$$\sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{2m+1} \binom{m}{\nu} v^\nu z^\nu = (1 + vz)^m \neq 0 \quad \text{für} \quad |z| < 1;$$

vir können daher Satz A anwenden und erhalten

2) $$\left| c_{2m+1} + 2mvc_{2m} + \binom{2m}{2} v^2 c_{2m-1} + \ldots + v^{2m} c_1 \right| \leqq \sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu}^2 |v|^{2\nu};$$

Gleichheit gilt hier nur für

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu \equiv e^{\gamma i} z^n \frac{\left(1 + \frac{\bar{v}}{z}\right)^m}{(1 + vz)^m} = e^{\gamma i} z^{m+1} \frac{(z + \bar{v})^m}{(1 + vz)^m}.$$

Natürlich gilt auch für gerade n die Ungleichung

3) $$\left| c_n + (n-1)vc_{n-1} + \binom{n-1}{2} v^2 c_{n-2} + \ldots + v^{n-1} c_1 \right| \leqq \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\frac{n-1}{2}}{\nu}^2 |v|^{2\nu},$$

edoch ist dies nur insolange die genaue Schranke, als die Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu z^\nu \equiv \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\frac{n-1}{2}}{\nu} v^\nu z^\nu = 0$$

keine Wurzel im Innern des Einheitskreises besitzt.

Man bezeichne die absolut kleinste Wurzel der Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\frac{n-1}{2}}{\nu} z^\nu = 0$$

mit z_n, und es sei $|z_n| = r_n$, dann ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\frac{n-1}{2}}{\nu} v^\nu z^\nu \neq 0 \quad \text{für} \quad |v| \leqq r_n \ \text{ und } \ |z| < 1;$$

für solche v-Werte ist also die obere Schranke in (3) die genaue, und es gilt dort Gleichheit im Falle

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu \equiv e^{\gamma i} \frac{\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}(n-1)}{\nu} \bar{v}^\nu z^{n-\nu}}{\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}(n-1)}{\nu} v^\nu z^\nu}.$$

Es ist leicht zu zeigen, daß im Falle $n = 2$ dies für beliebige $|v| \leqq 1$ gilt, das heißt, daß $r_2 \geqq 1$ ist [2]).

Dagegen ist schon $r_4 < 1$, denn es ist, wenn

$$\sum_{\nu=0}^{4} \binom{3/2}{\nu} z^\nu \equiv 1 + \frac{3}{2}z + \frac{3}{8}z^2 - \frac{1}{10}z^3 + \frac{3}{128}z^4 = l(z)$$

gesetzt wird,

$$l(0) = 1, \quad l(-1) = -\frac{5}{128} < 0,$$

daher hat $l(z)$ eine Nullstelle zwischen -1 und 0.

Das Resultat, das wir alsbald anwenden werden, können wir so zusammenfassen:

Wenn die Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ *der Bedingung* (E) *genügt, so ist*

$$(4) \quad \left| c_n + (n-1)vc_{n-1} + \binom{n-1}{2} v^2 c_{n-2} + \ldots + v^{n-1}c_1 \right| \leqq \sum_{\nu=0}^{n} \left| \binom{\frac{1}{2}(n-1)}{\nu} \right|^2 |v|^{2\nu}$$

$$(|v| \leqq 1, \; n \geqq 1);$$

das Gleichheitszeichen gilt bei ungeradem $n = 2m+1$ *nur im Falle*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu \equiv e^{\gamma i} z^{m+1} \left(\frac{z + \bar{v}}{1 + vz} \right)^m;$$

für $n = 2$ *gilt Gleichheit nur im Falle*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu \equiv e^{\gamma i} \frac{z^2 + \frac{1}{2}\bar{v}z - \frac{1}{8}\bar{v}^2}{1 + \frac{1}{2}vz - \frac{1}{8}v^2 z^2};$$

für $n = 4, 6, \ldots$ *ist die Schranke nur bei hinreichend kleinem* $|v|$ *genau, und sie wird dann nur im Falle*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu \equiv e^{\gamma i} \frac{\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}(n-1)}{\nu} \bar{v}^\nu z^{n-\nu}}{\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}(n-1)}{\nu} v^\nu z^\nu}$$

erreicht.

2. Um nun $f^{(n)}(\zeta)$ für $|\zeta| < 1$ abzuschätzen, betrachte ich die Funktion

$$f\left(\frac{u + \zeta}{1 + \bar{\zeta}u} \right) = \varphi(u);$$

sie ist regulär im Kreise $|u| < 1$ und es ist daselbst

$$(5) \qquad |\varphi(u)| \leqq 1,$$

[2]) Vgl. Szász, a. a. O. [1]), S. 178.

denn die Funktion

$$z = \frac{u+\zeta}{1+\bar{\zeta}u}, \quad \text{also} \quad u = \frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z} \tag{6}$$

bildet den Einheitskreis auf sich selbst ab. Nun ist

$$f^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{(z-\zeta)^{n+1}}$$

bei Integration über den Kreis $|z| = \varrho < 1$ in positivem Sinne; ich benutze diese Formel, um $f^{(n)}(\zeta)$ durch die φ-Funktion darzustellen. Offenbar ist

$$\frac{dz}{du} = \frac{1-|\zeta|^2}{(1+\bar{\zeta}u)^2}; \qquad z-\zeta = u\,\frac{1-|\zeta|^2}{1+\bar{\zeta}u},$$

und es wird

$$f^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\left|\frac{u+\zeta}{1+\bar{\zeta}u}\right|=\varrho} \varphi(u)\,\frac{(1+\bar{\zeta}u)^{n+1}}{u^{n+1}(1-|\zeta|^2)^{n+1}}\cdot\frac{1-|\zeta|^2}{(1+\bar{\zeta}u)^2}\,du$$

$$= \frac{n!}{2\pi i}\,\frac{1}{(1-|\zeta|^2)^n}\int \frac{\varphi(u)}{u^{n+1}}(1+\bar{\zeta}u)^{n-1}\,du \qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

Setzt man

$$\varphi(u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu u^\nu,$$

so ergibt sich demnach

$$\frac{(1-|\zeta|^2)^n}{n!}f^{(n)}(\zeta) = b_n + \binom{n-1}{1}\bar{\zeta}b_{n-1} + \binom{n-1}{2}\bar{\zeta}^2 b_{n-2} + \ldots + \bar{\zeta}^{n-1}b_1,$$

und insbesondere für $n=1$

$$(1-|\zeta|^2)f'(\zeta) = b_1.$$

Wegen (5) können wir hierauf die Formel (4) anwenden und erhalten (jetzt ist $v = \bar{\zeta}$)

$$\frac{(1-|\zeta|^2)^n}{n!}|f^{(n)}(\zeta)| \leqq \sum_{\nu=0}^{n}\left(\tfrac{1}{2}(n-1)\right)^2 |\zeta|^{2\nu} \qquad (|\zeta|<1, \quad n\geqq 1); \tag{7}$$

diese Schranke ist die genaue für $n=2$ und alle ungeraden n; für $n=4, 6, \ldots$ nur bei hinreichend kleinem $|\zeta|$. Die Gleichheit gilt hier in diesen Fällen nur für

$$\varphi(u) = e^{\gamma i}\,\frac{\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\frac{1}{2}(n-1)}{\nu}\zeta^\nu u^{n-\nu}}{\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\frac{1}{2}(n-1)}{\nu}\bar{\zeta}^\nu u^\nu}.$$

Speziell für $n=1$ wird[3])

$$|f'(\zeta)| \leqq \frac{1}{1-|\zeta|^2},$$

und Gleichheit gilt hier nur im Falle

$$\varphi(z) = e^{\gamma i} u,$$

also

$$f(z) = e^{\gamma i} \frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}.$$

Für $n=2$ wird aus (7)

$$|f''(\zeta)| \leqq \frac{2}{(1-|\zeta|^2)^2}\left[1+\frac{1}{4}|\zeta|^2+\frac{1}{64}|\zeta|^4\right],$$

und Gleichheit gilt nur im Falle

$$f(z) = e^{\gamma i} \frac{\left(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}\right)^2+\frac{1}{2}\zeta\cdot\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}-\frac{1}{8}\zeta^2}{1+\frac{1}{2}\bar{\zeta}\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}-\frac{1}{8}\bar{\zeta}^2\left(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}\right)^2}.$$

Schließlich für $n=2m+1$, $m=1, 2, \ldots$ wird

$$|f^{(2m+1)}(\zeta)| \leqq \frac{(2m+1)!}{(1-|\zeta|^2)^{2m+1}} \sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu}^2 |\zeta|^{2\nu},$$

und Gleichheit gilt nur im Falle

$$f(z) = e^{\gamma i} z^m \left(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}\right)^{m+1}.$$

Zusammenfassend gilt der Satz:

Es sei $f(z)$ für $|z|<1$ regulär und daselbst absolut $\leqq 1$; dann ist für $|\zeta|<1$

$$|f^{(n)}(\zeta)| \leqq \frac{n!}{(1-|\zeta|^2)^n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}(n-1)}{\nu}^2 |\zeta|^{2\nu}.$$

Diese Schranke ist die genaue für $n=2$ und alle ungeraden n,

---

[3]) Vgl. E. Lindelöf, Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel, Acta Societatis Scientiarum Fennicae, XXXV (1909), Nr. 7 (1908), 35 Seiten; insbes. S. 11–12. Daselbst auch die schärfere Ungleichung

$$|f'(\zeta)| \leqq \frac{1-|f(\zeta)|^2}{1-|\zeta|^2}.$$

Neuere Beweise dieser Relation gaben Carathéodory und Jensen. Herr Jensen zeigte, wie der Satz aus dem schon von Herrn Landau 1906 bewiesenen Spezialfall: $|c_1| \leqq 1-|c_0|^2$ leicht folgt. Vgl. J. L. W. V. Jensen, Undersøgelser over en klasse fundamentale uligheder etc. I. D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, Naturv. og math. Afd., 8. Række, II. 3. København, 1916, S. 203–228; insb. S. 219. Daselbst auch Literaturnachweis.

dagegen für $n = 4, 6, \ldots$ nur bei hinreichend kleinem $|\zeta|$. In den Fällen, wo die Schranke genau ist, wird die Gleichheit nur bei

$$f(z) = e^{\gamma i} \frac{\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}(n-1)}{\nu} \zeta^{\nu} u^{n-\nu}}{\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}(n-1)}{\nu} \bar{\zeta}^{\nu} u^{\nu}}, \quad u = \frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}$$

erreicht. Insbesondere ist

$$|f'(\zeta)| \leqq \frac{1}{1-|\zeta|^2}, \tag{8}$$

und Gleichheit gilt hier nur für

$$f(z) = e^{\gamma i} \frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z};$$

ferner ist

$$|f''(\zeta)| \leqq \frac{1}{(1-|\zeta|^2)^2}\left[2 + \frac{1}{2}|\zeta|^2 + \frac{1}{32}|\zeta|^4\right],$$

und Gleichheit gilt nur für

$$f(z) = e^{\gamma i} \frac{u^2 + \frac{1}{2}\zeta u - \frac{1}{2}\zeta^2}{1 + \frac{1}{2}\bar{\zeta}u - \frac{1}{2}\bar{\zeta}^2 u^2}, \quad u = \frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z};$$

schließlich ist für $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$|f^{2m+1}(\zeta)| \leqq \frac{(2m+1)!}{(1-|\zeta|^2)^{2m+1}} \sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu}^2 |\zeta|^{2\nu},$$

und Gleichheit gilt nur für

$$f(z) = e^{\gamma i} z^m \left(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}\right)^{m+1}$$

(Eingegangen am 12. März 1920.)

Zur Theorie der mehrdeutigen stetigen Abbildungen.

Von

B. von Kerékjártó in Ujpest.

In der vorliegenden Arbeit werden einige die Theorie der mehrdeutigen stetigen Abbildungen betreffenden Überlegungen durchgeführt.

§ 1.

Die Herren Carathéodory und Rademacher beweisen in ihrer Arbeit *„Über die Eineindeutigkeit im Kleinen und im Großen stetiger Abbildungen von Gebieten“* [Archiv d. Math. u. Phys., (3), **26**, Heft 1 (1917) S. 1—9] die beiden folgenden Sätze:

Satz I. *Es sei G ein Gebiet, d. h. eine aus lauter inneren Punkten bestehende zusammenhängende Punktmenge. Ferner sei G auf das Gebiet G' folgendermaßen bezogen:*

1) *Jedem Punkte P von G entspricht eindeutig ein Punkt P' in G' und jeder Punkt P' von G' ist Bild mindestens eines Punktes von G.*

2) *Jedem Punkt P von G kann man eine Umgebung U_P zuordnen, die in G enthalten ist und umkehrbar eindeutig und stetig auf eine Umgebung $U'_{P'}$ des Bildpunktes P' von P abgebildet wird.*

3) *Jeder Teilmenge von G, die keinen Häufungspunkt in G enthält, entspricht eine Teilmenge von G', die keinen Häufungspunkt in G' enthält.*

Dann besitzt die Abbildung von G auf G' eine m-deutige stetige Umkehrung, wo m eine in G' endliche konstante Zahl ist.

Satz II. *Sind die Voraussetzungen* 1), 2), 3) *des Satzes* I *erfüllt und ist außerdem G ein zweidimensionales, einfach zusammenhängendes Gebiet*[1]*, so ist erstens G' einfach zusammenhängend und zweitens die Abbildung von G auf G' umkehrbar eindeutig.*

[1]) Im Hausdorffschen Sinne, d. h. besitzt G eine einzige Randkomponente; s. F. Hausdorff, „Grundzüge der Mengenlehre“, Leipzig 1914, S. 351 [Bemerkung des Verfassers].

Eine klare Bedeutung dieser Sätze tritt hervor, wenn man den Begriff der Überlagerungsfläche zu Hilfe nimmt. Laut der Bedingungen 1), 2) des Satzes I wird G als eine *relativ unverzweigte Überlagerungsfläche* über G' erklärt, wobei jedem Punkte P von G der *Spurpunkt* P' zukommt [s. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, (1913), S. 47]. — Die Bedingung 3) werden wir durch die folgenden beiden ersetzen:

3a) *Jeder Teilmenge von G', deren Häufungspunkte in G' liegen, entspricht eine Teilmenge von G, deren Häufungspunkte in G enthalten sind.*

3b) *Jeder Punkt P' von G' ist Bild von höchstens endlich vielen Punkten von G.*

3a) ist eine unmittelbare Folge von 3) und 3b); 3b) folgt leicht aus 2) und 3), wie es von Carathéodory und Rademacher gezeigt wird; ihr Verfahren bedeutet in unserer Anschauung folgendes: Sei P' ein Punkt von G', $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ unendlich viele über P' liegende Punkte von G; U' eine genügend kleine Umgebung von P' in G', so daß die über ihr liegenden Umgebungen $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ von $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ in G keine gemeinsamen Punkte haben. Sei nun $Q_1', Q_2', \ldots, Q_n', \ldots$ eine zu P' konvergierende Folge in U'; dann nehme man den über Q_1' liegenden Punkt Q_1 von U_1, den über Q_2' liegenden Punkt Q_2 von U_2, usw. Die Folge $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ ist eine Teilmenge von G ohne zu G gehörigen Häufungspunkt, während die Spurpunkte $Q_1', Q_2', \ldots, Q_n', \ldots$ den Häufungspunkt P' in G' enthalten, gegen die Voraussetzung 3).

Die Folgerung, die wir ziehen wollen, ist die *Unbegrenztheit*[2]) von G relativ zu G'. — Sei $P' = P'(\lambda)$, $[0 \leqq \lambda \leqq 1]$ eine vom Punkte $P'(0) = P_0'$ ausgehende stetige Kurve γ in G', P_0 ein Punkt von G über P_0', so gebe es eine von P_0 ausgehende stetige Kurve $P = P(\lambda)$, $[0 \leqq \lambda \leqq 1]$ in G, so daß für jeden Wert des Parameters λ der Punkt $P(\lambda)$ über $P'(\lambda)$ liege, welches auch der Punkt P_0 von G und welches auch die vom Spurpunkte P_0' von P_0 ausgehende Kurve γ sein mag. In diesem Fall bezeichnen wir G als eine relativ unbegrenzte, unverzweigte Überlagerungsfläche von G'. — Nehmen wir einen Punkt P_0' von G' an, über welchem n Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_m$ von G liegen, dann gibt es m getrennte Umgebungen $U_1, U_2, \ldots, U_m$ von $P_1, P_2, \ldots, P_m$ in G, die über eine genügend kleine Umgebung U' von P_0' in G' liegen. Existierte nun für die von P_0' ausgehende Kurve γ: $P' = P'(\lambda)$ $[0 \leqq \lambda \leqq 1]$ und einen Punkt P_i über P_0' eine Schwelle Λ_0, $0 < \Lambda_0 \leqq 1$, des Parameters λ, so daß über jeden Teilbogen $0 \leqq \lambda \leqq \lambda_0$ von γ, für welchen $\lambda_0 < \Lambda_0$ ist, eine und auch nur eine) von P_i ausgehende Kurve in G liegt, dies aber nicht

[2]) Weyl, l. c., S. 47.

mehr der Fall ist, sobald $\lambda_0 \geqq \Lambda_0$, dann würde einer monoton wachsenden gegen Λ_0 konvergierenden Folge $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ eine gegen den Punkt $P'(\Lambda_0)$ von G' konvergierende Punktfolge $P'(\lambda_1), P'(\lambda_2), P'(\lambda_3), \ldots$ von G' entsprechen, während die über $P'(\lambda_i)$ liegenden Punkte $P(\lambda_1), P(\lambda_2), P(\lambda_3), \ldots$ keinen Häufungspunkt in G enthalten.

Die Voraussetzungen 1), 2), 3) definieren also G als eine endlichvielblättrige, unbegrenzte, unverzweigte Überlagerungsfläche von G', von welcher ja evident ist, daß sie jeden Punkt von G' mit der gleichen Anzahl von Blättern bedeckt.

Der Satz II sagt nun folgendes aus:

II a. Eine endlichvielblättrige, unbegrenzte, unverzweigte Überlagerungsfläche eines mehrfach zusammenhängenden Gebietes ist selbst mehrfach zusammenhängend.

II b. Ein einfach zusammenhängendes Gebiet besitzt keine andere, als nur *einblättrige*, unbegrenzte, unverzweigte Überlagerungsflächen (d. h. ist im Weylschen Sinne einfach zusammenhängend, s. l. c., S. 47).

II a läßt sich wie folgt einsehen[3]): Man nehme einen Querschnitt q' in G', der zwei zu verschiedenen Randkomponenten gehörige Grenzpunkte von G' verbindet; sei P' ein Punkt von q' innerhalb G', γ' eine einfache geschlossene Kurve in G', die q' nur in P' trifft und vom einen Ufer von q' auf das andere führt. Sei P ein über P' liegender Punkt von G, q die über q' liegende durch P gehende Kurve in G, die selbst einen Querschnitt von G darstellt, da auch G' relativ zu G unbegrenzt ist. Wir laufen nun um die Kurve γ' in einer bestimmten Richtung und bezeichnen mit γ die über γ' liegende, von P in der gleichen Richtung ausgehende Kurve in G, die nach vollendetem Umlauf in dem ebenfalls über P' liegenden Punkt P_1 von G endigt; sei dann γ_1 diejenige Kurve in G über γ', die von P_1 ausgeht und in einem über P' liegenden Punkt P_2 von G endigt, usw. Wegen der Endlichvielblättrigkeit von G gelangt man nach endlich vielen Umläufen zum Punkte P zurück und erhält in der Gesamtheit der Kurven $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ eine einfache geschlossene Kurve auf G, die q nur in P trifft und vom einen Ufer desselben auf das andere führt, woraus ersichtlich, daß G mehrfach zusammenhängend ist.

Daß die Bedingung der Endlichvielblättrigkeit von G über G' eine wesentliche für das Bestehen des Satzes II a ist, zeigt etwa das Beispiel der Überlagerungsfläche der Funktion $\log z$ über dem Kreisring $1 < |z| < 2$, wo die Grundfläche 2-fach, die Überlagerungsfläche aber 1-fach zusammenhängend und dem Kreisinnern homöomorph ist.

[3]) Diese Überlegung ist im Grundprinzip mit der von Carathéodory und Rademacher identisch, sie scheint uns jedoch in der vorliegenden Darstellung deutlicher als ihre deductio ad absurdum.

II b beweisen wir wie folgt[4]): Sei γ' eine einfache geschlossene Kurve in G', über welcher eine ungeschlossene Kurve von G liegt, oder wie wir kürzer sagen wollen, sei γ' eine nicht schließende Kurve in G'. Dann gibt es ein in genügender Nähe von γ' verlaufendes, einfaches geschlossenes, nicht schließendes Polygon π' in G', das aus einer endlichen Anzahl geradliniger Strecken gebildet ist, dessen Inneres wegen des einfachen Zusammenhangs von G' ganz zu G' gehört. Wegen der relativen Unverzweigtheit von G gibt es auf Grund des Heine-Borelschen Theorems eine positive endliche Zahl δ derart, daß jeder Kreis mit einem Radius $\leqq \delta$ um einen beliebigen Punkt P' im Innern von π' (und auch jede im Innern des Kreises verlaufende geschlossene Kurve) schließt. Wir nehmen nun eine quadratische Einteilung ζ der Ebene mit der Kantenlänge $\frac{1}{2}\delta$ vor und heben zuerst diejenigen Quadrate von ζ aus, die keinen Punkt im Äußern von π' haben, dann diejenigen Vielecke, die von den nicht im Äußern von π' liegenden Punkten der π' treffenden Quadrate von ζ gebildet werden[5]). So erhält man eine endliche Anzahl von schließenden Polygonen, und da es erstens evident ist, daß man diese derart aneinanderreihen kann, daß jedes neu gewählte Polygon einen einzigen zusammenhängenden Teil mit der Gesamtheit der bereits gewählten gemein habe, zweitens, daß die Aneinanderheftung von zwei schließenden Polygonen, die einen einzigen zusammenhängenden Teil gemein haben, wieder ein schließendes Polygon ergibt, so folgt endlich, daß das Polygon π' selbst schließen müßte, womit der Beweis fertig ist.

§ 2.

Wir beweisen zunächst eine Verallgemeinerung des Satzes I.

Satz III. *Sei das Gebiet G auf das Gebiet G' folgendermaßen bezogen*:

1) *Jedem Punkte P von G entsprechen mindestens ein und höchstens m Punkte von G' und jedem Punkte P' von G' mindestens ein und höchstens n Punkte von G* (die Anzahlen m und n werden wirklich *erreicht*).

2) *Wenn P ein beliebiger Punkt von G, P' ein beliebiger Bildpunkt von P in G' ist, dann kann man dem Punkte P eine Umgebung U_P in G zuordnen, die umkehrbar eindeutig und stetig auf eine Umgebung $U'_{P'}$ von P' in G' abgebildet wird.*

3) *Jeder abgeschlossenen Teilmenge von G entspricht eine abgeschlossene Bildmenge in G' und umgekehrt*[6]).

[4]) S. auch Weyl, l. c., S. 48 und 52.

[5]) Vgl. Osgood, Lehrbuch d. Funktionentheorie, 2. Aufl., Leipzig 1912, S. 181.

[6]) Die Umkehrung der Voraussetzung 3) des Satzes I, nämlich, daß jeder Teilmenge von G', die keinen Häufungspunkt in G' enthält, eine in G keinen Häufungs-

Dann ist die Beziehung eine überall (m, n)-deutige stetige Abbildung von G auf G', die dargestellt wird durch eine eineindeutige stetige Abbildung einer m-blättrigen unbegrenzten unverzweigten Überlagerungsfläche $\overline{G}$ von G auf eine n-blättrige unbegrenzte unverzweigte Überlagerungsfläche $\overline{G}'$ von G'.

Sei P_0 ein Punkt von G, dem m Punkte $P_1', P_2', \ldots, P_m'$ von G' entsprechen; das gleiche gilt [nach 2)] offenbar von allen Punkten einer genügend kleinen Umgebung von P_0 in G. Sei nun γ: $P = P(\lambda)$, $[0 \leqq \lambda \leqq 1]$ eine vom Punkte $P(0) = P_0$ ausgehende stetige Kurve in G, und $P(\lambda_0)$ deren erster solche Punkt, daß die Punkte $P(\lambda)$ $(\lambda - \lambda_0 =$ positiv und beliebig klein) von γ weniger als m Bildpunkte in G' haben; der Bogen $0 \leqq \lambda \leqq \lambda_0$ der Kurve γ wird auf die m Kurven $\gamma_1', \gamma_2', \ldots, \gamma_m'$ in G' abgebildet, dabei gehört gemäß 3) jeder Endpunkt $P_1'(\lambda_0), P_2'(\lambda_0), \ldots, P_m'(\lambda_0)$ zu G'. Da nach unserer Voraussetzung in beliebiger Nähe von $P(\lambda_0)$ solche Punkte $P(\lambda)$, $(\lambda > \lambda_0)$, liegen, die weniger als m Bildpunkte in G' haben, so muß $P(\lambda_0)$ selbst weniger als m Bildpunkte in G' haben, so daß wenigstens zwei Punkte $P_i'(\lambda_0)$ und $P_j'(\lambda_0)$ $(i \neq j)$ zusammenfallen. Anderseits entwerfen aber die in beliebiger Nähe von $P(\lambda_0)$ liegenden Punkte $P(\lambda)$, $(\lambda < \lambda_0)$, m verschiedene Bildpunkte in G', so daß in jeder Umgebung von $P_i'(\lambda_0)$ zwei Bildpunkte $P_i'(\lambda)$ und $P_j'(\lambda)$ von $P(\lambda)$ $(\lambda < \lambda_0)$ liegen sollten, was gegen die Voraussetzung 2) verstößt. — Somit ist eingesehen, daß jedem Punkte P von G genau m Punkte von G' entsprechen.

Wenn einem Punkte P' von G' die n Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ von G entsprechen, dann läßt sich zufolge 2) um jeden Punkt P_i eine Umgebung U_i in G bestimmen, die eineindeutig und stetig auf eine Umgebung U_i' von P' in G' abgebildet wird; der Durchschnitt der Umgebungen U_i' ist eine Umgebung U' von P' in G', die auf eine Umgebung eines jeden Bildpunktes P_i von P' in G eineindeutig und stetig bezogen wird. Es gilt demnach die Eigenschaft 2) auch von der Beziehung von G' auf G, und so folgt aus der obigen Überlegung, daß auch jedem Punkte P' von G' *genau* n Punkte von G entsprechen.

Nun konstruiere man eine m-blättrige Überlagerungsfläche $\overline{G}$ über G folgenderweise: Sei P_0 ein Punkt von G, P_0' ein Bildpunkt von P_0 in G'; jede von P_0 ausgehende, in P_1 endigende stetige Kurve γ in G definiere einen Punkt $\overline{P}_1$ von $\overline{G}$ über dem Punkt P_1 von G. Der Kurve γ entspricht eindeutig eine von P_0' ausgehende, in P_1' endigende stetige Kurve γ' in G'; die von P_0 ausgehenden und in P_1 endigenden Kurven γ_1 und γ_2

---

punkt enthaltende Menge entspricht, ist dort bereits in den Voraussetzungen 1), 2) enthalten, und durch diese symmetrische Voraussetzung kann unsere Voraussetzung 3) ersetzt werden.

lefinieren dann und nur dann den gleichen Punkt $\overline{P}_1$ von $\overline{G}$, wenn die hnen entsprechenden von P_0' ausgehenden Kurven γ_1', γ_2' den gleichen Endpunkt P_1' in G' haben. — Ähnlicherweise wird eine n-blättrige unbegrenzte unverzweigte Überlagerungsfläche $\overline{G}'$ von G' hergestellt. Die beiden Flächen $\overline{G}$ und $\overline{G}'$ sind nun eineindeutig und stetig aufeinander bezogen und ihre Beziehung gibt die Transformation von G auf G' zurück.

Wir verfolgen nun die Frage, wann diese (m, n)-deutige stetige Abbildung im folgenden Sinne umkehrbar ist.

Bedingung der Umkehrbarkeit. Wenn P und Q zwei Punkte von G sind, die einen Bildpunkt $P_1' = Q_1'$ in G' gemein haben, dann soll auch jeder Bildpunkt P_i' von P ein Bildpunkt von Q und jeder Bildpunkt Q_i' von Q ein Bildpunkt von P sein.

Diese ersetzen wir durch die allgemeinere

Bedingung der endlichen Gruppierbarkeit[7]). Man kann die Punkte P von G in Gruppen g von *genau* m' Punkten und die Punkte P' von G' in Gruppen g' von *genau* n' Punkten zerlegen, wobei jeder Punkt von G bzw. G' in eine und nur eine Punktgruppe g bzw. g' eingeht, dann die Gruppen g und g' paarweise eindeutig derart zuordnen, daß wenn g_0 und g_0' dabei einander entsprechen, dann alle Bildpunkte eines jeden Punktes von g_0 in g_0' enthalten sind, und umgekehrt; ferner besteht die gleiche Eigenschaft für keine echten Teile von g_0, g_0'. — Wir nennen m' bzw. n' den Gruppenindex von G bzw. G'.

Die Gruppen g bzw. g' als Punkte der *Modulfläche* der Gruppierung[8]) aufgefaßt ergeben je eine Fläche G_* bzw. G_*', welche eineindeutig und stetig aufeinander abgebildet sind.

Ist insbesondere $m' = n$, $n' = m$, dann erhält man aus der Bedingung der Gruppierbarkeit die der Umkehrbarkeit.

Aus der endlichen Gruppierbarkeit ist eine evidente Folge die

Bedingung der periodischen Ketten. Sei P_1 ein Punkt von G, P_1' ein beliebiger Bildpunkt von P_1 in G', P_2 ein beliebiger von P_1 verschiedener Bildpunkt von P_1' in G, P_2' ein beliebiger Bildpunkt von P_2 in G'; sei dann wieder das Bild P_3 von P_2' in G von den Punkten P_1, P_2 verschieden, usw.; dann wird die so gestaltete *Kette* $P_1 P_1' P_2 P_2' \ldots$ nach einer endlichen Anzahl von Schritten abbrechen; wenn dies nach höchstens

---

[7]) Vgl. L. E. J. Brouwer: Über topologische Involutionen, Amst. Ber. 27 (1919), 1201.

[8]) Dabei soll als Umgebung von g_0 die Gesamtheit derjenigen Gruppen g gelten, deren Punkte in den Umgebungen der Punkte von g_0 liegen.

$2N$ Schritten eintritt, wie auch immer die Bilder gewählt werden, dann sagen wir, dem Punkte P_1 kommt der Kettenindex N zu.

Unter der Voraussetzung, daß jedem Punkte P nur höchstens m Punkte P' und jedem P' höchstens n Punkte P entsprechen, folgt aus dem Erfülltsein der Bedingung in bezug auf das Anfangsglied P_1 das Bestehen derselben für alle in diese Kette eingehenden Glieder P_i, P'_i, wie man leicht nachweist.

Wir beweisen den folgenden

Satz IV. *Die Voraussetzungen* 1), 2), 3) *des Satzes* III *sollen bestehen und sei die Bedingung der periodischen Ketten mit einem beschränkten Index N für eine in G überall dicht liegende Punktmenge erfüllt, dann ist auch die Bedingung der endlichen Gruppierbarkeit mit Ausnahme höchstens einer isolierten Punktmenge von G erfüllt.*

Sei P_1 ein beliebiger Punkt von G, der nur periodische Ketten besitzt; da jedem Punkte von G höchstens m Punkte von G', jedem Punkte von G' höchstens n Punkte von G entsprechen und jede Kette nach höchstens $2N$ Schritten abbricht, so kann P_1 nur in eine endliche Anzahl von Ketten eingehen. Seien $P_1, P_2, \ldots, P_r$ die sämtlichen Punkte von G, die mit P_1 in eine gemeinsame Kette eingehen; man gebe um diese Punkte genügend kleine, nicht übereinander reichende Umgebungen $U_1, U_2, \ldots, U_r$, für welche die Voraussetzung der Eineindeutigkeit und Stetigkeit erfüllt ist. Alsdann erklärt jede Kette $P_{i_1} P'_{i_1} P_{i_2} P'_{i_2} \ldots P_{i_j} P'_{i_j}$ je eine eineindeutige stetige Abbildung von U_{i_1} auf U_{i_2}, von U_{i_2} auf U_{i_3} usw. und auch von U_{i_1} auf U_{i_3} usw. Seien durch zwei verschiedene Ketten zwei verschiedene Abbildungen σ_1 und σ_2 von U_1 auf U_2 gegeben; das Produkt $\sigma_1^{-1}\sigma_2$ ergibt eine eineindeutige stetige Abbildung τ von U_1 auf sich (oder auf ein Teilgebiet von U_1). Da nun die Bedingung der periodischen Ketten für eine in U_1 überall dicht liegende Punktmenge erfüllt ist und die bei τ einander entsprechenden Punkte Q_1 und $\tau(Q_1)$ von U_1 durch eine Kette miteinander verbunden sind, so wird nach einer endlichen Anzahl (höchstens $N(N-1)\ldots 3.2.1$) von Wiederholungen der Transformation τ jeder Punkt Q_1 von U_1, welcher der Bedingung der periodischen Ketten genügt, in sich übergehen und wegen der Überalldichtheit solcher Punkte in U_1 einerseits, wegen der Stetigkeit von τ anderseits, auch jeder Punkt von U_1 bei dieser Potenz von τ invariant sein. Also ist τ eine eineindeutige stetige *periodische Transformation* von U_1 auf sich selbst mit invarianter Indikatrix[9]), also laut meines *Rotationssatzes*[10]) einer Drehung homöomorph.

---

[9]) Da nämlich die Umgebungen U_1 und U_2 durch ihre Abbildungen in G' die gleiche Indikatrix von G' festsetzen.

[10]) Mathem. Ann., 80 (1919), S. 36—40.

Ferner ergeben auch alle Produkte von derart erklärten periodischen Transformationen von U_1 in sich wieder periodische Transformationen, wie man es ebenso nachweist, so daß sie zusammen eine *zyklische Rotationsgruppe* bilden[11]). Man zerlege also U_1 in ν äquivalente Sektoren, wobei ν die Ordnung der zyklischen Gruppe bedeutet, und man trage die gleiche Zerlegung auf jede Umgebung $U_2, U_3, \ldots, U_r$ mittels der U_1 auf diese Umgebungen abbildenden Transformationen über. Indem man je ν äquivalenten Punkten von $U_1, U_2, \ldots, U_r$ zu einer Punktgruppe g zusammenfaßt, erhält man zunächst eine Zerlegung von $U_1 + U_2 + \ldots + U_r$ in Punktgruppen g von *genau* $m' = r \cdot \nu$ Punkten, mit alleiniger Ausnahme der Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_r$. Auf die gleiche Weise ergibt sich eine analoge Zerlegung von G' im Kleinen. — Aus dieser Überlegung ging hervor, daß diejenigen Punkte, denen ein kleinerer Gruppenindex zukommt, als einem Punkte ihrer Umgebung, nur isoliert auftreten können; ferner folgt daraus, daß die analoge Zerlegung im ganzen G bzw. G' zum gleichen Gruppenindex m' bzw. n' führt, mit Ausnahme höchstens einer isolierten Punktmenge von G bzw. G', womit die Behauptung des Satzes IV bewiesen ist.

Aus IV folgt unmittelbar:

Satz V. *Sei das Gebiet G auf das Gebiet G' derart bezogen, daß die Voraussetzungen* 1), 2), 3) *des Satzes* III *erfüllt seien, ferner sei die Bedingung der periodischen Ketten mit einem beschränkten Index für eine in G überall dicht liegende Punktmenge erfüllt und dabei gelte n bzw. m als Kettenindex für je eine in G bzw. G' einen Häufungspunkt enthaltende Teilmenge von G bzw. G', dann ist die Beziehung eine umkehrbare (m, n)-deutige stetige Abbildung von G auf G', mit Ausnahme höchstens einer isolierten Punktmenge von G und G'.*

Wir spezialisieren nun die erhaltenen Resultate für einfach zusammenhängende Gebiete. Aus Satz III folgt zunächst:

Satz VI. *Bestehen die Voraussetzungen des Satzes* III *und ist außerdem G einfach zusammenhängend, dann besteht die gegebene Transformation aus m eineindeutigen stetigen Abbildungen von G auf G'.*

In diesem Fall besteht nämlich die unbegrenzte unverzweigte Überlagerungsfläche $\bar{G}$ von G, wegen des vorausgesetzten einfachen Zusammenhangs desselben, aus m getrennten Blättern, deren jedes auf G' $(1, r)$-deutig, also laut des Satzes II (1, 1)-deutig und stetig bezogen wird.

---

[11]) L. E. J. Brouwer, Amst. Ber., 27 (1919), S. 1203 und B. v. Kerékjártó, Über die periodischen Transformationen und endlichen Gruppen der Kreisscheibe und der Kugelfläche (in ungarischer Sprache). Dissertation, Budapest 1920, Teil I, Satz 3.

Eine Folgerung dieses Satzes für abgeschlossene Bereiche ist der folgende:

Satz VII. *Sei ein abgeschlossener einfach zusammenhängender Bereich B auf einen ebensolchen Bereich B' folgendermaßen bezogen:*

1) *Jedem Punkte P von B entsprechen mindestens ein und höchstens m Punkte von B' und jedem Punkte P' von B' mindestens ein und höchstens n Punkte von B.*

2) *Wenn P ein beliebiger Punkt von B, P' ein beliebiger Bildpunkt von P in B' ist, dann läßt sich um P eine solche Umgebung U und um P' eine entsprechende Umgebung U' bestimmen, daß der zu B gehörige Teil von U auf den zu B' gehörigen Teil von U' eineindeutig und stetig abgebildet wird.*

Dann besteht die Beziehung aus einer eineindeutigen stetigen Abbildung von B auf B'.

Aus Satz VI läßt sich zunächst leicht schließen, daß sie aus m eineindeutigen stetigen Abbildungen von B auf B' besteht. Wäre $m > 1$, dann ergibt die Zusammensetzung $t_1^{-1} t_2$ von zwei solchen Abbildungen t_1, t_2 eine eineindeutige stetige Transformation t des einfach zusammenhängenden Kontinuums B in sich, wobei nach einem Satze Brouwers[12]) wenigstens ein Punkt invariant bleibt. Sei also P ein solcher invarianter Punkt von B bei t, welcher in jeder Umgebung für t nicht-invariante Punkte Q enthält. Dann liegen in beliebiger Nähe von $t_1(P) = t_2(P)$ zwei Bildpunkte $t_1(Q)$ und $t_2(Q)$ von Q, was gegen die Voraussetzung der Eineindeutigkeit und Stetigkeit im Kleinen verstößt.

Ähnlich läßt sich schließen, daß, falls im Satz VI noch die Voraussetzung der periodischen Ketten erfüllt ist, dann die Beziehung aus *einer* eineindeutigen stetigen Abbildung von G auf G' besteht, auf Grund des Satzes, daß eine eineindeutige stetige periodische Transformation eines einfach zusammenhängenden Gebietes in sich wenigstens einen Fixpunkt besitzt.

Wir ersetzen die Bedingung der Eineindeutigkeit und Stetigkeit im Kleinen durch die folgende allgemeinere Bedingung.

Sei das Gebiet G auf das Gebiet G' derart bezogen, daß jedem Punkte P von G mindestens ein und höchstens m Punkte P' von G' und jedem Punkte P' von G' mindestens ein und höchstens n Punkte P von G entsprechen. Sei P ein Punkt von G, P' ein Bildpunkt von P in G'; dann läßt sich eine Umgebung U_P von P in G und eine Umgebung $U_{P'}$ von P' in G' derart bestimmen, daß wenn Q ein beliebiger Punkt von U_P, Q' ein beliebiger Bildpunkt von Q in $U_{P'}$ ist, dann immer eine *in der*

[12]) L. E. J. Brouwer, Mathem. Ann., 69 (1910), S. 178.

egebenen Beziehung enthaltene eineindeutige stetige Abbildung von U_P uf ein Teilgebiet von $U_{P'}$ sich bestimmen läßt, die P in P' und Q in Q' berführt.

Falls diese Voraussetzung erfüllt ist, werden wir sagen, die Transrmation sei *im Kleinen eineindeutig und stetig in weiterem Sinne.*

Wir setzen jetzt noch voraus, daß jede in G abgeschlossene Teilmenge on G eine in G' abgeschlossene Bildmenge besitzt und umgekehrt, und aß die Bedingung der periodischen Ketten mit einem beschränkten Index ir eine in G überall dicht liegende Punktmenge erfüllt ist. Wir zeigen ɔdann, daß unter diesen Voraussetzungen die nämlichen Schlußfolgerungen, ie in VI, gültig sind.

Zu diesem Zweck genügt es zu zeigen, daß unter den gemachten Vorussetzungen die Eineindeutigkeit und Stetigkeit im Kleinen auch in engerem inne besteht. — Sei P ein Punkt von G, P' ein Bildpunkt von P in G', U und U' je eine Umgebung von P bzw. P', die der Bedingung der Eindeutigkeit und Stetigkeit in weiterem Sinne, wie oben gewünscht, entprechen. Seien dann Q_1 und Q_2 zwei Punkte von U, die ein gemeinames Bild Q' in U' haben und t_1 bzw. t_2 sei je eine in der gegebenen ransformation von G auf G' enthaltene eineindeutige stetige Abbildung on U auf je einen Teil von U', die P in P' und Q_1 bzw. Q_2 in Q' überührt; die Transformation $t = t_1^{-1} t_2$ ist eine eineindeutige stetige Abbildung on U auf ein Teilgebiet desselben. Infolge der Bedingung der periodischen ketten kann man, wie im Beweis des Satzes IV, schließen, daß t periodisch t, und ferner, daß die sämtlichen solchen Transformationen t, die P in ch überführen, zusammen eine zyklische Rotationsgruppe bilden. Die erschiedenen Transformationen t_i, die P in P' überführen, gehen also aus-nander durch die Potenzen einer Drehung um P hervor. — Damit ist sbesondere gezeigt, daß diejenigen Punkte von G, für welche die Eindeutigkeit und Stetigkeit in engerem Sinne nicht besteht, eine isolierte enge bilden.

Berlin, den 23. April 1920.

(Eingegangen am 28. April 1920.)

Bemerkung zu der Arbeit des Herrn L. Neder: Über die Fourierkoeffizienten der Funktionen von beschränkter Schwankung[1].

Von

Hugo Steinhaus in Lemberg.

In jener Arbeit wird u. a. eine von F. Riesz[2] gestellte Frage nach einer stetigen, mod 2π periodischen Funktion $f(x)$ von (in $[0,2\pi]$) *beschränkter Schwankung*, deren Fourierkoeffizienten a_n, b_n die Grenzwertbeziehungen

$$(1) \qquad n a_n \to a, \quad n b_n \to b$$

erfüllen, und bei welcher wenigstens einer der Grenzwerte a, b von Null verschieden ist, verneinend beantwortet.

In dieser Note soll gezeigt werden, wie man den Nederschen Gedankengang unter Heranziehung zweier bekannter Sätze über Fourierreihen und Mittelkonvergenz zur folgenden Verschärfung seines Satzes verwerten kann:

Satz. *Ist $f(x)$ überall stetig, mod 2π periodisch und gilt* (1), *so ist*

$$(2) \qquad a = 0, \quad b = 0.$$

Die im Nederschen Satze gebrauchte Voraussetzung der Beschränktheit der Schwankung ist demnach entbehrlich.

Um zum Beweise zu gelangen, werden wir den *zweiten*, einfacheren, (weil ohne Riemannsche Sätze auskommenden) Nederschen Beweis[3] entsprechend modifizieren, doch könnte ebensogut diese Modifikation am ersten Beweise vorgenommen werden.

---

[1] Math. Zeitschr. 6 (1920), S. 270–273; die zitierte Arbeit habe ich dank dem Entgegenkommen des Verfassers vor ihrem Erscheinen lesen können.

[2] Math. Zeitschr. 2 (1918), S. 312.

[3] Welcher aus dem ersten Teil des § 2 und aus Fußnote 4 seiner Arbeit besteht.

Beweis. Ist $f(x)$ stetig und mod 2π periodisch, so ist (nach Fejér[4]) die Fourierentwicklung von $f(x)$ überall gleichmäßig, also auch für $x=0$ mittelkonvergent. Es ist daher

3) $$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

eine mittelkonvergente Reihe. Nun gilt aber (1), es ist also $|na_n|$ beschränkt, daher auch Reihe (3) — nach Hardy[5]) — konvergent, was mit $na_n\to a$ sofort $a=0$ ergibt. Führen wir jetzt die Funktion $g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ ein, welche offenbar stetig, mod 2π periodisch und daher auch in eine gleichmäßig mittelkonvergente Fourierreihe entwickelbar ist. Diese Entwicklung ist

4) $$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,$$

und da wieder, wegen $nb_n\to b$,

$$|nb_n\sin nx|\leqq|nb_n|<\text{konst.}$$

gilt, ist sie auch im gewöhnlichen Sinne gleichmäßig[6]) gegen $g(x)$ konvergent. Von jetzt an schließen wir mit Herrn Neder: $g(x)$ ist stetig, $g(0)=0$; daher ist für jedes $\delta>0$ ein $\varepsilon(\delta)>0$ vorhanden, so daß

$$|g(x)|<\delta \quad \text{für} \quad |x|<\varepsilon(\delta)$$

gilt. Wegen gleichmäßiger Konvergenz ist eine natürliche Zahl $m(\delta)$ vorhanden, so daß

$$\Big|\sum_{n=1}^{\nu}b_n\sin nx-g(x)\Big|<\delta \quad \text{für} \quad \nu\geqq m(\delta)$$

und alle x gilt, was schließlich

5) $$\Big|\sum_{n=1}^{\nu}b_n\sin nx\Big|<2\delta \quad \text{für} \quad \nu\geqq m(\delta),\quad |x|<\varepsilon(\delta)$$

ergibt. Wäre nun $b>0$, so könnte man $\delta=\frac{b}{8}$ setzen; nun wäre aber, wegen $nb_n\to b$, für alle $n\geqq k$ (k geeignet gewählt) $nb_n>\frac{b}{2}$ und daher für $\nu>k$, $\nu\geqq m(\delta)$, $\frac{1}{\nu}<\varepsilon(\delta)$, $x=\frac{1}{\nu}$

---

[4]) Math. Ann. 58, S. 51.

[5]) Proc Lond. Math. Soc., Ser. 2, 8, Part. 4 (1909), S. 302, § 3.

[6]) Die Hardysche Schlußweise ergibt ohne weiteres folgende Verallgemeinerung eines Satzes: Ist $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ *gleichmäßig* mittelkonvergent und $|n\varphi_n(x)|$ *gleichmäßig* beschränkt, so ist $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ *gleichmäßig* konvergent.

$$\sum_{n=1}^{\nu} b_n \sin nx \geqq \sum_{n=1}^{k} b_n \sin\frac{n}{\nu} + \sum_{n=k+1}^{\nu} b_n \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{n}{\nu} > \sum_{n=1}^{k} b_n \sin\frac{n}{\nu} + \sum_{n=k+1}^{\nu} \frac{b}{\pi} \cdot \frac{1}{\nu} =$$

$$= o(1) + \frac{\nu - k}{\nu} \cdot \frac{b}{\pi} \to \frac{b}{\pi} \quad \text{für} \quad \nu \to \infty,$$

also, für ein gewisses, natürliches N, welches $\geqq k + m + \frac{1}{\varepsilon}$ gewählt werden kann,

$$\sum_{n=1}^{N} b_n \sin nx > \frac{b}{4} > 0,$$

was wegen $\delta = \frac{b}{8}$ mit (5) im Widerspruch steht. Den Fall $b < 0$ erledigt man analog (indem man $-g(x)$ statt $g(x)$ einführt), so daß einzig

$$b = 0$$

sich als möglich herausstellt, w. z. b. w.

(Eingegangen am 25. Januar 1920.)